



TED ANKARA KOLEJİ VAKFI ÖZEL LİSESİ MATEMATİK DERGİSİ

# AETERNUM

Biray Oruçkaptan  
Ada Özer

9. ve 10. sınıf  
öğrencileri

9. ve 10. sınıf  
öğrencileri



9. ve 10. sınıf  
öğrencileri

SAYI 10

2022

9-K  
Ela Güner  
Evie Neff



“Bilim deyince, onda hakikat diye öne sürdüğü önermelerin pekin olmasını ister; pekinlik ise en mükemmel şekliyle matematikte bulunur. O halde bilim o disiplindir ki; önermeleri matematikle ifade edilir. O zaman matematiği kullanmayan disiplinler bilimin dışında kalacaklardır.”

Mustafa Kemal Atatürk

## Değerli Okuyucular,

Pandemi ertesi yoğunluğuyla geçen uzun bir dönemin ardından öğrencilerimizin özverili çalışmaları ile yayıma sunabildiğimiz 10. sayımız ve yepyeni konularımızla tekrar karşınızdayız. Önceki sayılarımızda olduğu gibi bu sayımızda da matematiğin keşfedilmiş ya da keşfedilmeyi bekleyen günlük hayat ilişkilerini, formüllerini, mimarlarını ve eğlenceli taraflarını birlikte keyif almayı amaçlayarak sizlerle paylaşıyoruz.

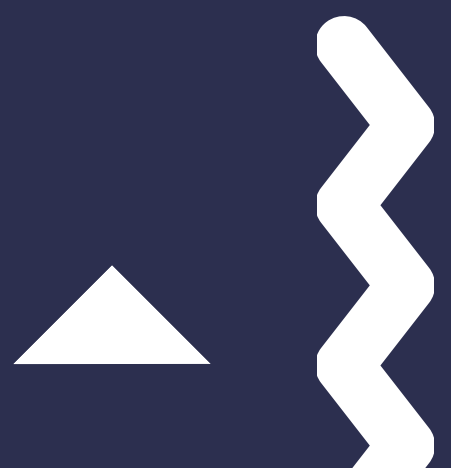
Mustafa Kemal Atatürk'ün bir sözüyle açtığımız bu sayımızı Anıtkabir'in bir çizimini yaptığımız ve mimarisinde kullanılan matematiği anlattığımız yazımızla başlayarak taçlandırdık. Ardından, matematiksel ve cebirsel sembollerinin tarihçesi yazımızda günlük hayatta çok sık kullandığımız dört işlem işaretlerinin nereden geldiğine, matematikte meşhur “bilinmeyen” yerine neden genellikle  $x$  harfini kullandığımıza, trigonometrinin gözbebeği “sinüs”ün neden “sinüs” ismiyle anıldığına, sonsuzluk kavramının sonsuz anlamı arasında matematiğin sonsuzluğu nasıl anlamlandırdığına ve izdüşümsel geometrinin temellerine değindik. Bu tarihi yolculuğun sonunda ise bir grup matematikçinin, o zamanlar bir asker olan, Nicolas Bourbaki adı altında toplanıp kitaplar yazma macerasından ve o dönemin matematiksel gelişimine nasıl katkı sağladığından, son olarak da hatalı bir tercüme sonucu “matematiğin cadı”sının yaratılışından bahsettik.

Tarihe yaptığımız bu kısa yolculuktan sonra, faktöriyel kavramını farklı bir açıdan ele aldığımız Stirling Formülü, matematiğin şıklığını temsil etmesi ile ünlü Euler Formülü, her gün kullandığımız navigasyonların bizi gitmek istediğimiz yere en hızlı ve kısa yoldan nasıl götürdüğünü açıklayan Dijkstra algoritması ve kaç farklı muhtemel satranç oyunu oynanabileceği hakkında farklı isimlerin teori ve tahminleri ile sizleri buluşturduk.

Sonra bir keşfe çıktık ve dört adet dört rakamı kullanarak kaç farklı sayı yazabiliriz sorusunun cevabını araştıran, düzensiz cisimlerin eylemsizlik momentini nasıl bulabileceğimizi sorgulayan ve kuantum bilgisayarlarını anlamaya çalışan keşif yazıları paylaştık. Dergi yolculuğumuza yazarlarımızın kodlama ve şifreleme alanlarındaki çalışmaları ile devam ettik. İlk olarak, olasılık üzerine yapılmış bir kodlama çalışması ve sonuçlarını, sonrasında ise 2'nin kuvvetleri ile yapılmış bir şifreleme çalışmasını aktardık. Bakalım, bu yazının sonunda yer alan gizli şifreyi çözebilecek misiniz? Ve sona keyifli soruları cevaplayan yazılarımızı bıraktık. Bir kupa ve bir tatlı çörek nasıl olur da topolojide aynı obje olabilir? Futbol topunun köşeleri mi varmış?

Yazılarımızın matematik okyanusunda bir su damlası olduğunu hatırlatır, sizlere okyanusa açılma merakı verecek çok keyifli okumalar dileriz.

Matematikle ve sevgiyle kalın,  
Aeternum Yayın Ekibi



# İçindekiler



|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| Anıtkabir Mimarisinde Semboller İle Mozoleye Üç Boyutlu Bakış - Defne TUNCER | 1  |
| Matematiksel ve Cebirsel Sembollerin Tarihçesi - Nazlı İpek BEDİR            | 5  |
| Değişken x ile Nasıl Tanıştık - Reyhan İLHAN                                 | 8  |
| Trigonometrinin Gözbebeği Sinüs - Yağmur Zeynep MUTLU                        | 10 |
| Matematik Sonsuzluğu Nasıl Anlamlandırır - Tuğçe DEMİRÖZ                     | 12 |
| Projektif Geometri Temelleri - Yağmur YETKİN                                 | 15 |
| Nicolas Bourbaki Var Mıdır Yok Mudur - Ada Defne DEMİR                       | 18 |
| Matematiğin Cadısı - Miray AKTAN                                             | 20 |
| Faktöriyele Farklı Bir Bakış, Stirling Formülü - Damla ALKAN                 | 23 |
| Matematiğin en şık hali - Defne ŞEKER                                        | 25 |
| Dijkstra algoritması - Alperen KONUKBAY                                      | 31 |
| Kaç Tane Farklı Muhtemel Satranç Oyunu Olabilir - Ufuk KÖPRÜLÜ               | 36 |
| Dört Adet 4 Rakamı Kullanarak Kaç Tane Sayı Yazılabilir - Berke Tigin KAYGIN | 40 |
| Eylemsizlik Momenti - Arda Mert DEMİR                                        | 44 |
| Kuantum Bilgisayarları ve Matematik - Erdem TELLİOĞLU                        | 47 |
| Olasılık Üzerine.. Sayı Tahmin Oyunu - Tan GÜRLER                            | 52 |
| 2'nin Kuvvetleri ile Şifreleme - Selin Su ALTINTAŞ                           | 57 |
| Topoloji ve Homeomorfizma - Zeynep ALTINBAŞ                                  | 62 |
| Köşeleri İle Futbol Topu - Sinan TUĞUTLU                                     | 67 |
| Zeka Soruları - Berke Tigin KAYGIN                                           | 70 |
| Zeka Soruları Cevapları                                                      | 72 |

DERLEYEN VE YAYIMA HAZIRLAYANLAR

EZGİ SERT KOLAY

GÜLCEHAN CEYHAN ERKEN

## DEFNE TUNCER (10-Y)

Mustafa Kemal Atatürk; Türkiye Cumhuriyeti'nin kurucusu, lideri ve ilk Cumhurbaşkanı olup; Türk Milletini birleştiren, ülkemizi yeniliklerle çağdaş seviyelere yükselten, eğitim, hukuk ve sosyal hayatta gelişmemizi sağlayan, ekonomiyi geliştiren vizyon sahibi bir devlet adamı ve reformcuydu. Günümüzde bile son yüzyılın gördüğü en büyük lider ve devlet adamı olarak kabul edilen Mustafa Kemal Atatürk, tüm dünyanın saygı duyduğu büyük bir liderdir.



Bu makalede Mustafa Kemal Atatürk'ün ebedi olarak istirahat ettiği Anıtkabir'in bazı mimari özelliklerine değinerek, Anıtkabir'in en etkileyici yapısı olan; hepimizin birlik, çağdaşlık, minnet ve gurur duygularıyla gezdiğimiz Mozole kısmının üç boyutlu çizimini hazırlayarak farklı bir bakış açısı sunmak planlanmıştır. Böylece günümüz bilgisayar teknolojisi ile mimarideki matematiksel öğeleri birleştirerek Mustafa Kemal Atatürk'ün çağdaş hayata uyum sağlamayı hedefleyen eğitim ve bilime verdiği öneme atıf yapmak amaçlanmıştır.



10 Kasım 1938'de Mustafa Kemal Atatürk'ün ölümüyle Türk milleti büyük bir üzüntü yaşadı. Böylece, Türk milletinin kendisine olan büyük sevgisini, vefa ve minnetini göstermek için modernleşme düşüncelerini temsil edecek bir mozole inşa etmek istenmiştir. Bu istekle 1941 yılında Uluslararası bir mimarlık yarışması düzenlenmiş ve yarışmaya dünyanın dört bir yanından önemli mimarlar toplam 50'ye yakın projeye katılmıştır. Johannes Krüger, Arnaldo Foschini ve Profesör Emin Onat ile Doçent Orhan Arda'ya ait projeler son üç proje olarak seçilmiştir. Türkiye Büyük Millet Meclisi kararı ile Prof. Dr. Emin Onat ve Doç. Dr. Orhan Arda'nın projesi birinci olmuştur. Bu doğrultuda inşaat 9 Ekim 1944'te başlamış ve 9 yılda tamamlanmıştır.

Anıtkabir'in genel mimarisinde matematiksel açıdan yapılarda simetrik özelliklere sahip baskın bir anıtsal görünüm göze çarpmaktadır. Anıtkabir yaklaşık 750.000 m<sup>2</sup>'lik bir alanı kaplamaktadır. Komplekste simetrik olarak yerleştirilmiş ve yapı olarak da birbirine benzeyen 10 adet

kule bulunmaktadır. Kuleler dikdörtgen plan üzerine  $12 \times 14 \times 7.20$  metre ölçülerinde inşa edilmiştir. Christopher Wilson kitabında, Mustafa Kemal Atatürk ile ilişkilendirilen mimaride görülen temsillerin Türk kimliğinin özelliklerini yansıttığını belirtmiştir.



Kompleksin ana girişi dikdörtgen bir meydana çıkan “Aslanlı Yol” olarak adlandırılan bir yol içermektedir. Bu ana girişte bulunan 26 adet basamak, Kurtuluş Savaşı sırasında Dumlupınar ve Kocatepe’de kazanılan zaferleri temsil etmekte olan 26 Ağustos 1922 tarihini simgelemektedir. Bu sembolle Kurtuluş Savaşı’nın dönüm noktasını olan tarih vurgulanmaktadır.



Merdivenlerin bittiği noktada solda erkek, sağda kadın heykelleri bulunmaktadır. Erkek heykeller birer öğrenci, köylü ve askerden oluşur ve eğitim, üretim ve savunmayı temsil eder. Kadın heykelleri ise Türk topraklarını simgeleyen buğday çelengi tutmaktadır ve ortadaki kadın ise Atatürk’ün kayından dolayı duyulan acıyı simgeleyecek şekilde ağlamaktadır.



Aslanlı Yolda 24 adet aslan heykeli vardır. Heykellerin çift sayıda olması “birlik ve bütünlüğü”, yatış pozisyonunda bulunmaları ise “huzuru” temsil etmektedir.

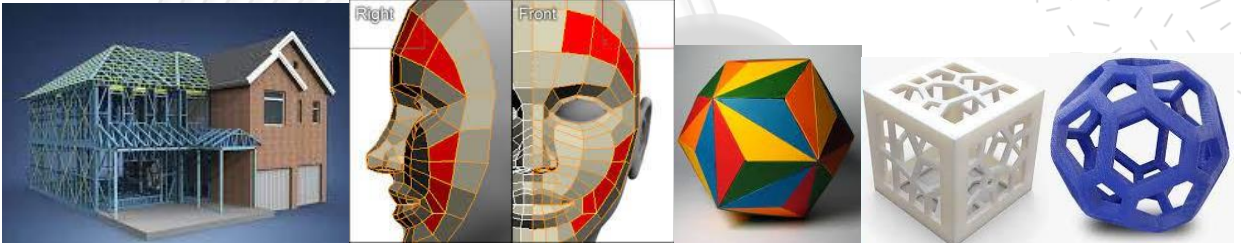
Aslanlı Yol’un sonunda Tören Meydanı olarak isimlendirilen alana ulaşılmaktadır. Burada önemli ayrıntılardan birisi; TBMM’nin Mozoleye olan uzaklığıdır. Bu uzaklık, TBMM’nin kuruluş tarihine atıf yapmakta olup 1920 metredir. Mozole,  $72 \times 52$  metre zemin ölçülerinde ve 17 metre



yüksekliğinde dikdörtgen planlı olarak inşa edilmiştir. Temelden yüksekliği 22,8 metredir. Mozoleye toplam 42 adet basamaklı bir merdiven ile ulaşılmaktadır. 42 basamak; Atatürk'ün Cumhuriyeti ilan ettiği 42 yaşını sembolize etmektedir. Mozolenin büyük sütunlarının her biri 19,44 metre yüksekliğe sahiptir. Bu da Anıtkabir'in temelini atıldığı 1944 yılını simgelemektedir. Mozole, önde 8, arkada 8 ve her iki yanda 14 sütundan oluşmaktadır. Sütunlar 14,4 metre yüksekliğinde ve  $800 \times 800$  metre boyutundadır.

### GÜNCEL TEKNOLOJİ: ÜÇ BOYUTLU MODELLEME

Günümüzde teknoloji alanındaki büyük ilerlemeler insanların hayatlarını kolaylaştırmak, bilgiye kolay ulaşmalarını sağlamak, ve imkanları uygun maliyetli şekilde sunmak için önem taşımaktadır. Tıp, inşaat, mimarlık, matematik ve hatta sanat alanlarında büyük kolaylıklar sağlayan önemli bir teknolojik gelişme, 3 boyutlu modelleme yazılımlarının ortaya çıkmasıdır. Böylece, üç boyutlu bir nesnenin matematiksel temsili oluşturulabilmektedir.

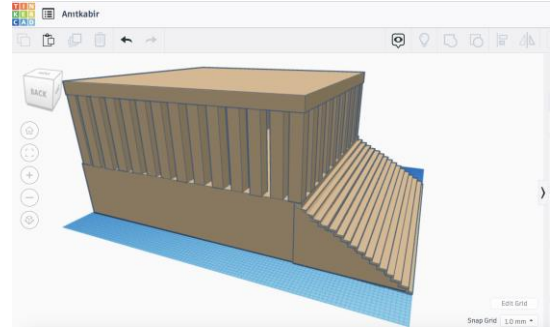
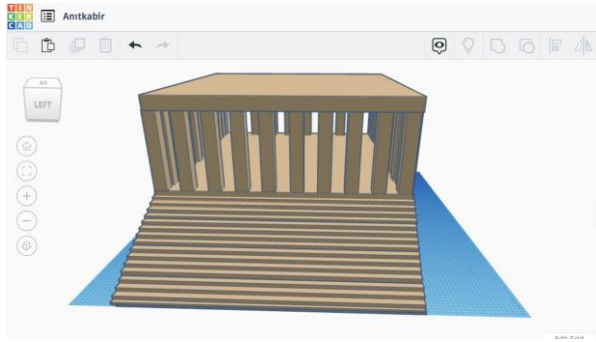
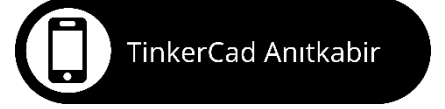


Fransa, Lille Üniversitesi'nde Matematik ve Bilgisayar Bilimleri alanında doktora derecesine sahip bir Doçent, 3 boyutlu görüntülerin ve baskıların aynı anda nesnelerin tüm yönlerini keşfetmeyi sağladığını açıklamıştır. Bu anlamda bilgisayar programları ile nesnelerin 3 boyutlu modellenmesi iki boyutlu incelemelerin yetersizliklerini gidermektedir. Geometrinin kurucusu Öklid, 3 boyutlu modelleme tekniğine ilham kaynağı olmuştur. Analitik geometriyi icat eden bir diğer matematikçi Rene Descartes de 3 boyutlu yeryüzü modellemelerinin gelişimine ön ayak olmuştur. Son zamanlarda, İngiliz matematikçiler matris matematiğini tanıtarak bilgisayar destekli grafik görüntülerinin gelişimine imkan sağlamışlardır. Bu modellemeler insanlar için gerçek görsel bilgiler sağlamaktadır. Tıp alanındaki 3 boyutlu modellemeler, ameliyatlarda dokular hakkında en gerçekçi bilgileri sunmakta ve operasyon güvenliğini artırmaktadır. İnşaatlarda ise maliyetleri azaltabilmektedir. Öte yandan uzmanlık gerektirmeleri, büyük veri kapasiteleri ve artan çalışma süreleri dezavantajlardır.

Her ne kadar piyasada bir çok farklı modelleme programı mevcut olsa da, bu makalede Anıtkabir Mozolesinin 3 boyutlu modellemesini hazırlarken Tinkercad yazılımı kullanılmıştır.

Çizime ulaşmak için sağdaki QR kodunu okutmanız yeterli.

Bu yazılım web tarayıcısında çalışan, 3 boyutlu tasarımlar oluşturmak için düzenli olarak kullanılan bir platform olup, okullarda geometriye giriş seviyesi olarak da kullanılmaktadır.



Güncel bir teknoloji olan ve gelecekte de birçok meslek alanında kullanımı gerekecek olan üç boyutlu modelleme ile Anıtkabir'in Mozole yapısının modellemesini sunduğumuz bu makale ile amacımız, biz genç nesillerin Mustafa Kemal Atatürk'ün fikirleri ve devrimlerinin değerini hatırlamak, başta bilim, eğitim ve sanat olmak üzere her alanda teknolojiyi takip ederek ilerlememiz gerekliliğini yeniden vurgulamak olmuştur.

#### Kaynaklar:

1. Boran, Tunç (2011b). *Mekân ve Siyaset İlişkisi Bağlamında Anıtkabir (1938-1973) (Doktora tezi)*. Ankara: Ankara Üniversitesi Türk İnkılap Tarihi Enstitüsü.
2. Christopher S.Wilson. *Anıtkabir'in ötesi Atatürk'ün mezar mimarisi ulusal benliğin inşası ve sürdürülmesi*. Çevirmen: Mehmet Beşikçi, Koç Yayınları, 2015.
3. Çakmakçoğlu Kuru, Alev (Nisan 2017). "Anıtkabir'deki renkli taş süslemeler -İkonografik bir yaklaşım-". *Sanat Tarihi Dergisi*. 26 (1). ss. 69-93.
4. <https://en.wikipedia.org/wiki/AutoCAD>
5. [https://en.wikipedia.org/wiki/Autodesk\\_3ds\\_Max](https://en.wikipedia.org/wiki/Autodesk_3ds_Max)
6. [https://en.wikipedia.org/wiki/Autodesk\\_Revit](https://en.wikipedia.org/wiki/Autodesk_Revit)
7. <https://en.wikipedia.org/wiki/Tinkercad>
8. <https://i.materialise.com/blog/en/mathematics-colorful-3d-printing/>
9. <https://www.britannica.com/biography/Kemal-Ataturk>
10. <https://www.britannica.com/science/matrix-mathematics#ref894198>
11. <https://www.icmimarlikdergisi.com/2016/11/10/anitkabirin-mimarisi>
12. <https://www.takeoffpros.com/2020/04/27/quide-to-3d-modeling/>
13. <https://www.turkchem.net/anitkabir-mimarisi-ve-ozellikleri.html>
14. Toker, Saadet; Kocatürk, Tuba; Ünay, Ali İhsan (Haziran 2010). "Structural Assessment And Strengthening of Atatürk's Mausoleum, Anıtkabir". *METU Journal of the Faculty of Architecture (İngilizce)*. 1 (27): 125-138. doi:10.4305/METU.JFA.2010.1.7

## MATEMATİKSEL VE CEBİRSEL SEMBOLLERİN KISA TARİHÇESİ

**NAZLI İPEK BEDİR (10-E)**

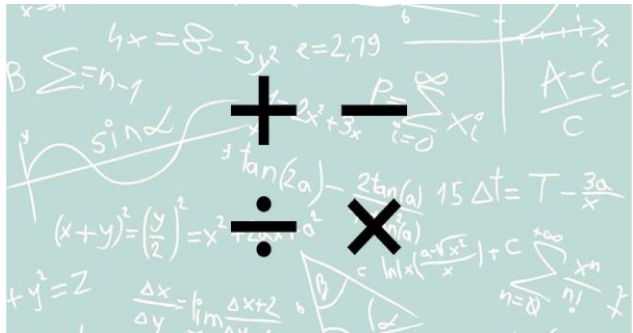
Matematik insanlık tarihinin en eski bilimlerinden biridir. Çok eskiden, matematik sayıların ve şekillerin ilmi olarak tanımlanmıştır, diğer bilim dallarında olduğu gibi geçen zaman içinde büyük bir gelişme göstermiştir. Hiç şüphe yok ki, eski zamanlarda insanların sayısal bilgilere anlam kazandırmak, onları sınıflandırmak, bilgi karmaşasını önlemek ve bilgiye kolayca ulaşmak için matematiksel sembollerine ihtiyaçları vardı.

Matematikte kullanılan semboller fonksiyonel ve cebirsel olarak ikiye ayrılır. Matematiksel ve cebirsel sembollerin tarihçesi oldukça eskiye dayanır. Matematik sözcüğü, ilk kez, M.Ö. 550'lerde, Pisagor Okulu üyeleri tarafından kullanılmıştır. Yazılı literatüre girmesi, Platon'la M.Ö. 380'lerde olmuştur. Kelime manası "öğrenilmesi gereken şey" yani, bilgidir. Bu tarihlerden önceki yıllarda, matematik kelimesi yerine yer ölçümü manasına gelen geometri ya da eski dillerde ona eşdeğer olan sözcükler kullanılmıştır.

Matematiksel gösterimin gelişimi aşamalara ayrılmaktadır. "Retorik Aşama", hesaplamaların kelimelerle yapıldığı ve hiçbir sembolün kullanılmadığı dönemdir. "Eşzamanlı Aşama", sık kullanılan işlemlerin ve miktarların sembolik sözdizimsel kısaltmalarla temsil edildiği dönemdir. Antik çağlardan post-klasik çağa kadar, matematiksel yaratıcılığın hızlı ilerlemelerinin çoğu kez yüzyıllarca süren durgunluk dönemleri ile kesintiye uğradığını görürüz. "Sembolik Aşama", kapsamlı notasyon sistemlerinin retorik yerini aldığı yerdir. 16. yüzyılda İtalya'da başlayarak, yeni bilimsel keşiflerle etkileşime giren yeni matematiksel gelişmeler günümüze kadar devam eden artan bir hızla yapılmıştır. Bu sembolik sistem, Orta Çağ Hint matematikçileri tarafından ve Avrupa'da 17. yüzyılın ortalarından beri kullanılıyordu ve uygar çağda gelişmeye devam etti.

En sık kullanılan matematiksel semboller arasında yer alan dört işlem sembolleri, 15 ve 17. yüzyıllar arasında ortaya çıkan sembollerdir. Alman ve İngiliz matematikçiler tarafından ifade edilmiştir. (+) ve (-) işaretlerini ilk kez Jean Viedman 1489'da yayımlanan "Pratik Matematik" isimli kitabında kullanmıştır.

Toplama işareti, Latince "ve" anlamına gelen ve ön ek olarak kullanılan "et" sözcüğünün ikinci harfi olan "t" den türetilmiştir. Bölme sembolü olan ( $\div$ ) işaretine ilk kez 12. yüzyılda yazılan Arapça eserlerde rastlanmıştır ve bu işaret söz konusu eserlerde kesirli değerleri göstermek amacıyla kullanılmıştır. Avrupalılar ise önceleri bu sembolü çıkarma işlemini tanımlayan bir sembol olarak kullanmıştır. Daha sonra çıkarma işareti olarak bu gösterim günümüze dek gelmiştir. Çarpma işareti ilk kez 1631'de



William Oughtred tarafından olarak kullanılmıştır. Leibniz, John Bernoulli'ye gönderdiği mektupta işaretinin yazılışının pratik olmadığını ve bilinmeyen için kullanılan  $x$  harfiyle karışabileceğini öne sürerek,  $(a \cdot b)$  biçimindeki nokta ile olan gösterimi kullandığını yazmıştır.

Sonsuzluk sembolü ( $\infty$ ), 1665 yılında İngiliz matematikçi John Wallis tarafından Yunan alfabesinin son harfi olarak tariflenmiştir. Pi sayısı ( $\pi$ ), 1706 yılında ilk defa William Jones tarafından kullanılmıştır. Yaygın olarak kullandığımız karekök sembolü ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ) ise, Kristof Rudolff tarafından 1525 yılında tariflenmiştir.

Bilinen eski metinlerde cebirsel semboller yoktu. Cebirsel denklemler ise geometrik ve retorikti. Örneğin; Öklid'in (M.Ö. 330-275) *Elementler* kitabının bugüne ulaşmış en eski kopyasında geçen yedinci önerme şöyledir: "eğer düz bir çizgi rastgele kesilirse bütünün karesi, parçaların kareleri ve parçaların oluşturduğu dikdörtgenin iki katına eşittir" şeklinde retorik olarak sözlü şekilde ifade edilen bu önerme günümüzde bilinen

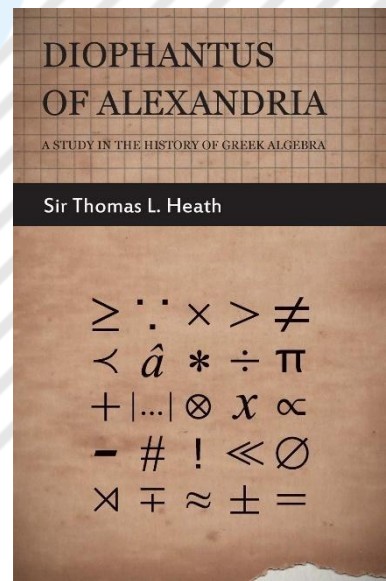
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

denkleme karşılık gelmektedir.

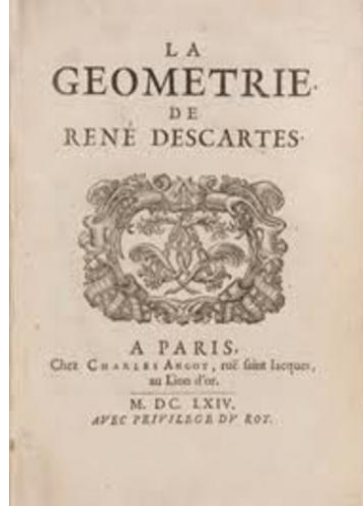
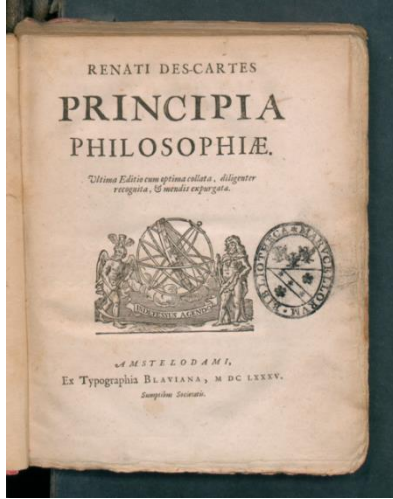
İskenderiyeli Diophantus (M.S. 214-298) cebirin babası olarak tanımlanmaktadır. İlk cebirsel sembol kullanan kişi olarak kabul edilir. Cebir denklemleri ve sayılar teorisi üzerine *Arithmetika* adlı eserin yazarı olan Yunan matematikçidir. Değişkenleri sadece tam sayılar olan ve kendi adını taşıyan *Diophantus Polinom Denklemleri*'yle de bilinir. Eksi sembolü olarak " $\Psi$ " sembolünü kullanmıştır. Diophantus sonrasında gelen birçok matematikçi genelde az sembol kullanmıştır ve daha çok kelimelerin kısaltmalarını kullanmışlardır. Tabii ki geçmişten günümüze ulaşan semboller ve kısaltmalar; katipler, çevirmenler ve tarih araştırmacıları tarafından değiştirilmiş ve formları bozulmuş olarak günümüze ulaşmış olabilirler.

Hârizmî (M.S. 780-850), 9. yüzyılın ortalarında yayınladığı *Tamamlama ve Dengeleme ile Hesaplama Üzerine Özlü Kitap* isimli matematik kitabı ile cebirin temelini oluşturmuştur. Bir dönem bulunduğu Hindistan'da sayıları ifade etmek için harfler ya da heceler yerine basamaklı sayı sisteminin kullanıldığını saptamıştır. Hârizmî'nin bu konuda yazdığı kitabın Latinceye tercüme edilmesi sonucu, sembollerden oluşan bu sistem ve sıfır, 12. yüzyılda batı dünyasına sunulmuştur.

Daha sonraki yıllarda Araplar İspanya üzerinden cebiri Avrupa'ya yaymıştır. Böylece Avrupa'da cebirle ilgili gelişmeler yaşanmaya başlanmıştır. Cardano tarafından 1545'te basılan *Ars Magna (Artis Magnae)*, cebirde yeni bir çığır açmıştır. Çeşitli matematiksel ve cebirsel semboller ve formüller ilk defa bu kitapta yayınlanmıştır.



Bundan sonraki yıllarda özellikle Descartes, Oughtred, Leibniz ve Newton gibi matematikle uğraşan bilim adamlarının sayesinde yeni semboller bulunmuş, eski semboller uygun formlara sokulmuştur. Böylece 17. yüzyılın sonuna gelindiğinde matematiksel ve aritmetik semboller açısından çok hızlı bir oluşturma yarışı başlamıştır. Bu tarihten günümüze matematik tamamen yazı dili ile ve sembollerle ifade edilebilecek, karıştırılmayacak ve herkes tarafından doğru anlaşılabilir bir hale gelmiştir.



Matematiğin dili dünyanın ortak dilidir. Bir logaritmik denklemin çözümünü, bir eğrinin çizimini yapan her kişi dünyanın neresinde olursa olsun aynı matematiksel sembolleri kullanacaktır. Matematiksel semboller, matematik dilinin sözcükleri gibidir. Nasıl ki bir düşünceyi doğru ve güzel bir biçimde aktarabilmek için özenle seçilmiş uygun sözcüklere gerek varsa, matematik yapmak için de güçlü, nitelikli sembollere gerek vardır. Matematiğin 5000 yıllık yazılı tarihinde zenginleşerek birçok değişikliğe uğrayan bu semboller matematiksel anlatımın yapı taşlarıdır.

#### Kaynaklar:

1. Adnan Baki, Suphi Önder Bütüner. *Cebirin Tarihsel Gelişimi*. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, Vol.2No.3 (2011), 198-231
2. <https://bilimvegelecek.com.tr/index.php/2011/05/01/matematiksel-semboller/>
3. <https://dergice.com/sikca-kullanilan-matematik-sembollerinin-ortaya-cikisi>
4. [https://stringfixer.com/tr/History\\_of\\_mathematical\\_notation](https://stringfixer.com/tr/History_of_mathematical_notation)
5. Murat Baş. *Matematiğin Tarihsel Gelişimi ve Matematik Tarihinin Matematik Eğitiminde Kullanılması*. *TAY Journal*, 2019, 3 (1), 1-22, ISSN: 2618-589X
6. Prof. Dr. Ali Ülger, Koç Üniversitesi. *Matematiğin Kısa Bir Tarihi*. <http://home.ku.edu.tr/~aulger/histofmathematics.html>

## DEĞİŞKEN $x$ İLE NASIL TANIŞTIK?

REYYAN İLHAN (9-G)

Hepimiz matematik başta olmak üzere birçok bilimde bilinmeyenine yerine hep " $x$ " harfini koyarız. Peki, neden başka bir harf değil de genellikle  $x$ ? Aslında  $x$  harfinin kökeni ile ilgili kesin bir yargı bulunmamakla birlikte doğruluğuna daha fazla inanılan birçok atıf bulunmaktadır. Hadi şimdi gelin bunların neler olduğuna birlikte bakalım.

Hipotezlerden birincisi İslam coğrafyası ile ilgilidir. 10. yüzyılda İslam coğrafyasında, astronomi ve matematik başta olmak üzere birçok bilim dalı üzerinde araştırmalar yürütülürdü. Müslümanlığın yayılması ile elbette bilgi de yayıldı. Matematiksel bilgiler içeren Arapça metinler, nihayet 11 ve 12. yüzyıllarda İspanya üzerinden Güney Avrupa'ya ulaştı. Tarihin bu noktasında, bu metinlerin bir Avrupa diline çevrilmesine büyük ilgi vardı ama bunu yapmak o kadar kolay değildi. Problemlerden biri, Avrupa dillerinde mevcut olan karakterlerle ifade edilemeyen bazı seslerin mevcut olmasıydı. İslam alimlerinin matematik üzerinde uğraşırken, çözmeye çalıştıkları değişkenler için Türkçede "bilinmeyen" anlamına gelen "şey" sözcüğünü kullanmış olmalarıdır. İslam coğrafyasından gelen bilimi Avrupa dillerine çevirmeye çalışan Orta çağ İspanyol alimleri, "şey" sözcüğünü İspanyolcaya çevirmekte zorlanmışlardır, çünkü "ş" sesi İspanyolcada bulunmamaktadır. Bu duruma bir çözüm bulmak isteyen alimler, en sonunda klasik Yunan dilinden "kai" bağlacını ( $\chi$ ) veya "chi" ( $\chi$  veya  $X$ ) harfini ödünç almışlardır. Görebileceğiniz gibi kai bağlacı da Yunancada  $x$  harfi gibi yazılmaktadır. Buradaki "şey" sözcüğünün İspanyolcaya doğrudan çevrilememesi, klasik Yunancadaki kai harfinin İngilizceye çevrilirken görünümünden ötürü  $x$  olarak alınmasıyla artık  $x$  harfi matematiğin ünlü "bilinmeyen sembolü" olarak karşımıza çıkmıştır. Bu sonuçtan dolayı medeniyetlerin ve dillerin birbirleriyle olan etkileşimlerinin bilimin üzerinde etkisi olduğunu söyleyebiliriz.



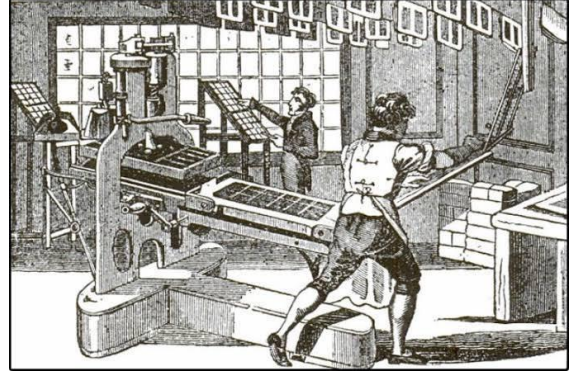
Birçok bilim insanı yukarıdaki hipoteze dayalı " $x$ " hakkında belirtilen bilgileri kabul etmemektedir. Bir diğer önemli bir bilgi ise Descartes ile ilgilidir. Tam olarak " $x$ "i kullanma düşüncesini mi ortaya çıkardığı yoksa daha önceki araştırmalarında da mı kullandığı bilinmemektedir. Fakat, **René Descartes**



Şekil 1: René Descartes

tarafından yazılan *La Géométrie* isimli kitapta bilinmezliği temsil etmek için alfabenin son 3 harfi olan  $x$ ,  $y$  ve  $z$  harfleri kullanılmıştır. Descartes, değeri bilinen değişkenler için de alfabenin ilk harfleri olan  $a$ ,  $b$  ve  $c$  harflerini kullanmıştır. Bu sayede de sembolik notasyon kullanımına geçilmesine vesile olmuştur. Bununla birlikte Descartes'la ilgili bilinmeyen " $x$ " hakkında başka hipotezler de öne sürülmüştür.

Diğer bir hipotez ise,  $x$  harfinin Fransızca ve Latince'de nadiren kullanılmasıdır. Bu durumdan kaynaklı  $x$  harfinin bilinmezlik için kullanılması matbaalarda yazmayı kolaylaştırmaktadır. Bu açıklama yaygın olarak kabul görmez çünkü Descartes dizgiden çok önce  $x$  harfini kullanmıştır. Ancak dilbilimciler, bunun  $x$ 'in neden  $y$  veya  $z$ 'den daha popüler olduğunu açıklayabileceğini düşünüyor.



Yukarıda anlatılanlar neden bilinmeyen hep  $x$  olduğu ile ilgili hipotezlerden sadece birkaçıdır. Bunların doğruluğu ve gerçekliği ise bir tartışma konusudur. Ne demiş Bertrand Russel:

***“Matematik ne neden söz ettiğimizi, ne de söylediğimiz şeyin doğru olup olmadığını bilmediğimiz bir konudur.”***

Umarım bu yazıda kafanızdaki sorulara cevap bulmanıza yardımcı olmuşumdur.

Hoşça kalın, matematik ile kalın!

#### **Kaynaklar:**

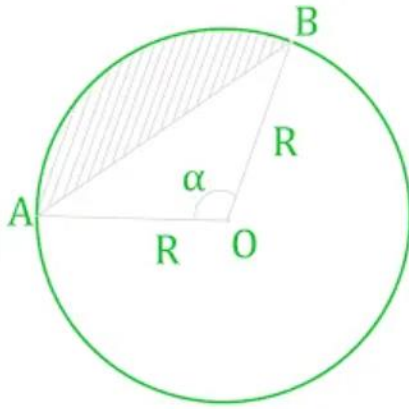
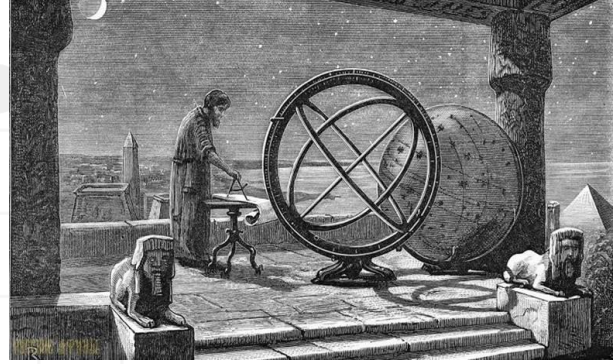
1. <https://evrimagaci.org/matematikteki-bilinmeyen-olarak-kullanilan-x-harfi-nereden-geliyor-4883#:~:text=G%C3%B6rebilece%C4%9Finiz%20qibi%20kai%20ba%C4%9Flac%C4%B1%20da,%22bilinmeyen%20sembol%C3%BC%22%20ortaya%20%C3%A7%C4%B1km%C4%B1%C5%9Ft%C4%B1r.>
2. <https://www.matematiksel.org/x-neden-hep-bilinmeyendir/>



## TRİGONOMETRİNİN GÖZBEBEĞİ: SİNÜS

YAĞMUR ZEYNEP MUTLU (9-G)

Şüphesiz her öğrenci trigonometri konusunda sinüs terimini duymuştur ve bir açının sinüs değerinin, bir dik üçgendeki dar açının karşısındaki kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranlanması ile bulunduğunu da hatırlar. Peki ama neden bu orana 'sinüs' ismi verilmiştir? Hiç merak ettiniz mi? Haydi gelin birlikte bu kelimenin nereden geldiğini öğrenelim.



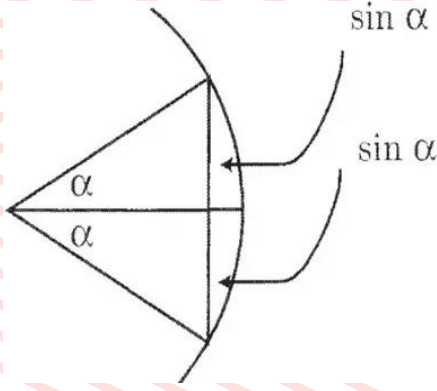
Görselde A ile B noktaları arasındaki çizgi AB kirişi diye adlandırılır.

M.Ö. 2. yüzyılda yaşamış olan astronom Hipparchus yıldızların ve gezegenlerin gökyüzünde nasıl hareket ettiklerini açıklayacak bir model bulmak istiyordu. O dönemde gökyüzü devasa bir küre gibi görüldüğünden yıldızların konumları da açılar ile belirleniyordu. Açılarla çalışmak zor olduğundan açılarla doğru parçaları ile ilişkilendirilmesi gerekiyordu. Bir çemberde, herhangi iki doğru parçası arasındaki açının ve bu açının karşısında bulunan diğer bir doğru parçası ile ilişkilendirilmesi için seçilen bu doğruya kiriş adı verilmiştir.

Kirişleri kullanmak yıldızların ve gezegenlerin şimdiki ve gelecekteki konumlarının saptanmasını sağlamıştır. Hipparchus, yarıçapı 3438 olan bir çemberle çalışarak farklı açılara denk gelen kirişlerin uzunluklarını veren bir tablo

hazırlamıştır. Bunu yaparken, bir çemberdeki merkez açı için, açının çemberi kestiği noktalar arasındaki düz doğru parçasının uzunluğunu veren kiriş fonksiyonu için değerleri tablo haline getirmiştir ve bunu çevresi 21.600 birim ve yarıçapı yaklaşık olarak 3438 birim olan bir çember için hesaplamıştır. Bu çemberin çevresi boyunca birim uzunluğu bir yay dakika olarak hesaplanmıştır. 7,5°'lik artışlarla açılar için kirişleri tablolaştırmıştır.

Hipparchus'un tablolarına ulaşılmasa da Yunan gökbilimci Claudius Ptolemy, bir kiriş tablosunun nasıl oluşturulacağını açıklamıştır. Devamında ise  $\frac{1}{2}^\circ$  ile  $180^\circ$  arasındaki kirişlerin yaklaşık olarak hesaplanmasını sağlayan bir yöntem geliştirmiştir. Daha sonrasında Hindistan'da yapılan 'yarı kirişler' tablosu önemli bir de kavrayışı yansıtmıştır. Kirişlerin bir açının yarısı olarak kullanılması gereken durumlarda kiriş iki eş parçaya ayrılır. Bu durumda iki tane dik üçgen ortaya çıkar.



Sinüs isminin ortaya çıkışı 'kiriş' kelimesinden gelmektedir. Çalışmalarda yalnızca yarı kiriş (jyā-ardha) kullanıldığından genellikle sadece jyā veya jīvā biçiminde kirişler ele alındı. Arap matematikçilerin kullandıkları yarı kiriş tabloları Avrupa'ya ulaştığında Arapça ok anlamına gelen jiba'ya çevirildi fakat çoğu zaman jb olarak kullanıldı. Arap matematikçiler trigonometriyi geliştirdiklerinde ve cebir ile arasında bağlantılar keşfedildiğinde bu bilgilere ulaşan Avrupalı matematikçiler jb kelimesini kullanmak yerine

Latince bir kelime olan ve göğüste boşluk anlamına gelen sinüs kelimesini yarattılar.

### PEKİ NEREDEN ÇIKTI BU KOSİNÜS?

Neredeyse 200 yıl boyunca kosinüs için özel bir ada gerek duyulmadı. Zaman içinde tamamlayıcı açının sinüsü anlamına gelen co-sinüs ifadesi kullanılmaya başlandı. Latin kökenli olan ön ek 'co' ortak ve birlikte anlamı vermek için kullanılır.

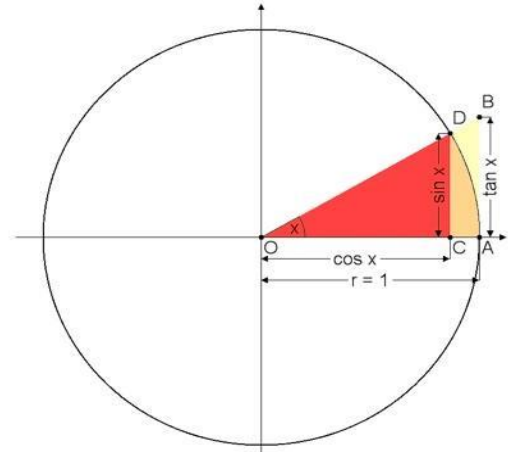
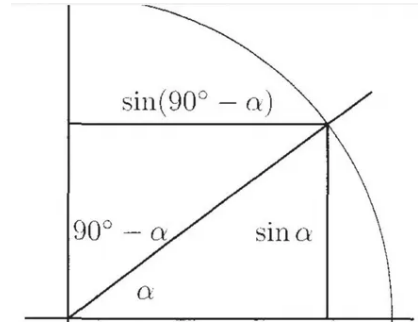
### PEKİ NEREDEN ÇIKTI BU TANJANT?

Trigonometrinin bazı öğeleri, Babiller ve Mısırlılar döneminden biliniyordu. Eski Yunanlar Menelaos'un küresel geometrisi aracılığıyla, bir daire içine çizilebilen dörtgenden yola çıkarak daire yaylarının kirişlerinin değerlerini veren çizgiler oluşturuyorlardı. Bundan sonra, Araplar yay kirişlerinin yerine sinüsleri koyup tanjant kavramını geliştirmişlerdir. Ayrıca, kotanjant, sekant ve kosekant kavramlarını da bu sayede geliştirilmiştir.

Tanjant kelimesinin kökeni Fransızca teğet anlamına gelen *tangente*'den gelmektedir. Fakat bu sözcük Latince *tangens* yani "dokunan" anlamına gelen sözcükten alınmıştır. Buradaki bağlantı tanjant kelimesinin sözlük anlamının "Başka bir çizgiye, eğriye ve yüzeye dokunan, fakat onu kesmeyen çizgi, eğri veya yüzey. Bir şeye yalnız bir noktada değen" olması ile kurulabilir. Sonuç olarak, sinüs teriminin keşfedilmesi diğer trigonometrik oranların bulunmasına vesile olmuştur diyebilir miyiz?

#### Kaynaklar:

1. Çağlar, Sibel. *İznikli Hipparkhos ve Trigonometrinin Doğuşu*, 2017 <https://www.matematiksel.org/hipparchus-trigonometrinin-dogusu/>
2. Çağlar, Sibel. *Nereden Çıktı Bu Sinüs ile Kosinüs?* 2020 <https://www.matematiksel.org/nereden-cikti-bu-sinus-ile-kosinus/>
3. Marshall, Jason. *What are Sine, Cosine, and Tangent*, 2020 <https://www.quickanddirtytips.com/education/math/what-are-sine-cosine-and-tangent>
4. [www.matematikciler.org](https://www.matematikciler.org) matematikciler.com: *Trigonometri (Dik Üçgenlerdeki Trigonometrik Oranlar)* <https://www.matematikciler.com/8-sinif-trigonometri/>



Şekil 1: Birim çemberde trigonometrik oranlar

## MATEMATİK SONSUZLUĞU NASIL ANLAMLANDIRIR?

**TUĞÇE DEMİRÖZ (10-D)**

Sonsuz kelimesinin kökeni yunanca olan “lemniscate” kelimesine dayanmaktadır. “ $\infty$ ” sembolü ile gösterilir. Genellikle matematik ve fizikte sonu veya sınırı olmayan şeyleri tanımlamak için kullanılır. Zaman ve mekân açısından sınırsızlık durumudur. Bir sayı kümesi, o küme ile kendisinin uygun bir alt kümesi arasında birebir eşleşme varsa, sonsuz olarak tanımlanabilir. Sonsuzluk matematikte sıklıkla bir sayıymış gibi ele alınır (örneğin: sonsuz sayıda terim) ancak aslında gerçek bir sayı değil, bir fikir ve büyüklüktür. Bu nedenle matematiksel terimlerle bir çelişki içindedir. Matematik belirli büyüklükleri ele alırken sonsuzluk doğası gereği sayılamaz veya ölçülemez.

Matematikte sonsuz bir ad değil bir sıfattır. “Sonlu” kelimesi bir sıfat olduğu gibi “sonsuz” da bir sıfattır. Sonsuz ve sonlu zıt kavramlardır. Matematikte sonu olmayana sonsuz denir. Adı sonsuz olan matematiksel bir nesne yoktur fakat sonsuz matematiksel nesneler vardır. Örneğin matematikte 5 bir nesnedir. 1 de bir nesnedir. 5’ten 1’i çıkardığımızda 4 nesnesini elde ederiz. Ancak sonsuz bir nesne olmadığından  $\infty - 1$  de nesne olamaz.



Sonsuzluk, insan zihninde somutlaştırması zor ve anlaşılması güç bir kavram olduğundan düşünce tarihinin en eskilerine dayanır. İnsan aklı sonlu düşüncelere alışık olduğu için sonsuzluk fikrini hazmetmekte güçlük çeker. Yüzyıllar boyunca Tanrı, uzay ve zaman gibi metafiziksel kavramların gelişmesiyle sonsuzluk ile ilgili giderek daha derin açıklamaları yapılmıştır. Sonsuzluğun tanımlanmasındaki zorluk onu metafizikçilerin gözdesi haline getirirken, matematik ve mantıkçıların aynı sebepten dolayı kaçındıkları bir konu haline gelmiştir. Hatta 19. yüzyılın sonuna kadar

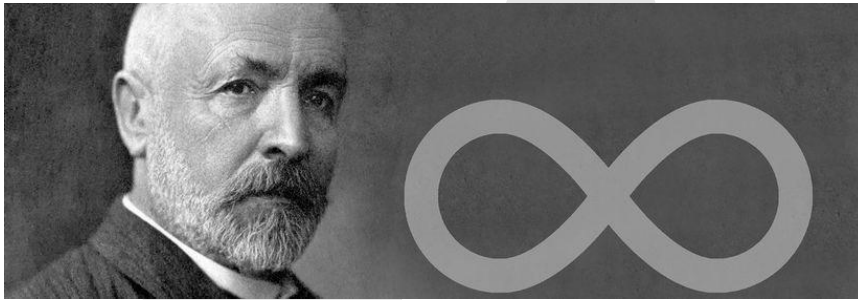
matematikçiler ve diğer bilim insanları, sonsuzluğun anlamlı bir kavram olup olmadığı konusunda şüpheli kalmışlardır.

Sonsuzluğun herkes ve her disiplin için farklı anlamları olabilmektedir. Bu nedenle, bu konu ile ilgili ortak bir fikre varılamamıştır. Bir fizikçi için sonsuz kavramının karşılığı evren olabilirken, bir matematikçi için bir küme olabilir. Felsefe tarihinde de sonsuzlukla ilgili birçok görüş vardır. Bazı filozoflar sonsuzluğa bir açıklama, bir tanım getirmeye çalışırken, bazıları sonsuzluğu anlamaya çalışmanın gereksiz olduğunu düşünmüştür.

Antik Yunan'da Thales'in kurmuş olduğu Milet okulunda felsefi anlamda ilk kez "sonsuz" kavramı kullanılmıştır. Bu kavramın tartışılmasının temel nedeni evreni anlamak ve varlığın özünü tanımlayabilmektir. Thales'in öğrencisi Anaksimandros felsefe tarihinde ilk kez "sonsuz" kavramını kullanan filozof olmuştur. Anaksimandros, canlı cansız her şeyin özünün sonu olmayan bir varlık olduğunu savunmuştur. Bu anlamda sonsuzu iyi, güzel, mükemmel gibi olumlu kavramlarla özdeşleştirmiştir. Öte yandan Pisagor, Anaksimandros'un aksine, sonsuzu kötü, çirkin, anlaşılabilir gibi olumsuz kavramlarla bağdaştırmıştır. Bunun nedeni evrendeki her şeyi doğal sayılarla ilişkilendirmesidir. Ayrıca sonlu ve sonsuz arasındaki ilişki, ontoloji yani varlık felsefesi alanında varlık ve var olan üzerinden incelenmiştir. Varlığın tek olma durumu, fiziksel evrendeki çoklu varlık ve var olanın birbirinden ayrılmasını sağlamıştır. Herakleitos her şeyin değişim, hareket ve çokluktan oluştuğunu, değişmeyen tek şeyin kendisi olduğunu savunmuştur. Parmenides ise bu düşünceyle zıtlaşarak varlığın tek ve hareketsiz olduğunu söylemiştir.



Kalkülüsün temeli ile mücadele edilirken sonsuzluğun bir sayı mı yoksa büyüklük mü olarak kabul edileceği bir belirsizlik içindeydi. 19. yüzyılın sonunda, Georg Cantor sonsuz kümeleri ve sonsuz sayıları inceleyerek matematiksel çalışmasını genişletmiş ve sonsuz kavramını ilk kez anlaşılabilir hale getirmiştir. Sonsuzluğun tek olmadığını, çeşitli boyutlarda olabileceğini göstermiştir.



*Şekil 1: George Cantor*

Cantor sonsuzun büyüklüğünü ölçmek için iki kümenin kardinalitesinin aynı olma koşulunu o iki kümenin eleman sayıları arasında birebir eşleşen fonksiyonun varlığına bağlamıştır.  $A$  ve  $B$  kümelerinin arasında birebir eşleşen fonksiyon varsa bu iki kümenin kardinalitelerinin aynı olduğu söylenebilir. Bu ilişki  $|A| = |B|$  şeklinde gösterilir. Sonlu kümeler için bu teoremin doğruluğu açıktır. " $n$ " tane elemanı olan bir kümenin kuvvet kümesinin kardinalitesi  $2^n$  olur.  $2^n$ ,  $n$ 'den büyük olduğuna göre sonlu sayıda elemana sahip kümeler için teorem doğrudur.

Cantor herhangi bir kümeden daha büyük bir küme olduğunu göstermiştir. Teorem boş olmayan herhangi bir  $X$  kümesinin kuvvet kümesinin kardinalitesinin,  $X$  kümesinin kardinalitesinden büyük olduğunu söyler. Teoreme göre  $X$  ve  $X$ 'in kuvvet kümesi aralarında birebir eşleşme yapılamaz.  $P(X)$ 'in  $X$ 'in kuvvet kümesi olarak alırsak, Cantor teoremi her  $X$  kümesi için  $|X| < |P(X)|$  olduğunu söyler. Bir başka deyişle,  $|X| \neq |P(X)|$  ve  $|X| \leq |P(X)|$ 'i kanıtlayalım:

$f: X \rightarrow P(X)$  fonksiyonunun bir örten fonksiyon olduğunu varsayarsak,

$$Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

kümesi  $f$ 'in görüntü kümesi içinde değildir. Çünkü eğer  $z \in Y$  olmak üzere  $f(z) = Y$  sağlansaydı  $z \in Y$  ancak ve ancak  $z \notin Y$  olurdu. Bu da çelişki yaratır. O zaman  $f$  fonksiyonu ( $X$ 'ten  $P(X)$ 'e) örten bir fonksiyon değildir, böylece  $|X| \neq |P(X)|$  olur.

$f: X \rightarrow P(X)$  fonksiyonunun birebir fonksiyon olduğunu gösterelim.

$f(x) = \{x\}$  fonksiyonu,  $X$ 'ten  $P(X)$ 'e birebir bir fonksiyondur. O halde  $|X| < |P(X)|$  olduğu görülür. Çünkü bir  $A$  kümesinin kardinalitesi  $\kappa$  ise  $P(A)$ 'nin kardinalitesi  $2^\kappa$  olur. Herhangi bir  $A$  kümesi için Cantor Teoremi  $|A| < 2^{|A|}$  olduğunu söyler.

Bu teorem ile Georg Cantor, sonsuzluğun tek olmadığını, çeşitli boyutlarda olabileceğini ve her sonsuzdan daha büyük bir sonsuz olduğunu göstermiştir. Sonsuzluğu matematiksel bir kavram haline getirerek sonsuz matematik nesnelerin diğer matematiksel nesneler gibi incelenebilmesini sağlamıştır.

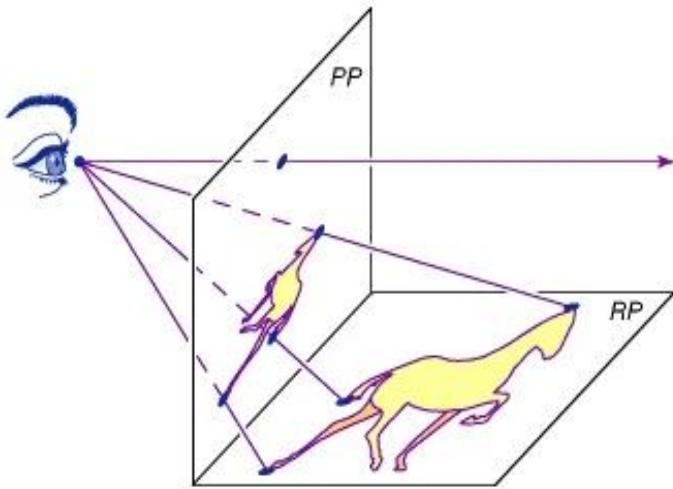
#### **Kaynaklar:**

1. Ali Nesin, Matematik ve Gerçek, Nesin Yayınevi, İstanbul, 2009
2. Ali Nesin, Kümeler Kuramı 1, Nesin Yayınevi, İstanbul, 2017
3. Ali Nesin, Sezgisel Kümeler Kuramı, Nesin Yayınevi, İstanbul, 2008
4. Ahmet Çevik, Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık, Nesin Yayınevi, İstanbul, 2019
5. <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/31447>
6. [https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2019/09/sonsuz\\_matematikvesonsuz.pdf](https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2019/09/sonsuz_matematikvesonsuz.pdf)

Fransa'nın Lyon kentinde doğan tasarı geometrinin kurucularından biri olarak tanınan Fransız matematikçi ve mühendis Girard Desargues, Fransız hükümdarına hizmet eden bir çocuktur. Noter olan babası ise işi sebebiyle çeşitli devlet görevlerinde yer almıştır. Aslında mühendis olan Desargues iş hayatına atıldığında ilk başlarda mühendislik yapmaktaydı ancak 1645'ten itibaren mimarlık yapmaya başlamıştır. Bir mimar olarak Desargues, Paris ve Lyon'da birçok özel ya da kamuya ait bina tasarlamış, mühendisliğiyle Paris yakınlarında kurduğu bir su taşıma sistemi geliştirmiştir. Daha sonraları ise kendini geometriye adanmış olan Desargues, ilk başta ressamların perspektif konusunda edindiği bilgiyi geometriye uyarlamak istemiştir. Desargues teoremi, Desargues grafiği ve Ay üzerindeki Desargues krateri, onun adını taşımaktadır.



"Merkezi izdüşüm" kavramı sayesinde Desargues, Apollonius konikleri kuramının yöntemlerini bütünleştirmiştir. Özelliklerini çemberde tanıtip daha sonra konikleri bir çemberin perspektifleri olarak kabul etmiş ve çemberde elde ettiği sonuçları koniklere de aktarmıştır. Çalışmalarına uzun yıllar boyunca devam etmiş, üretken ve yenilikçi kavramlar bulmuştur. Desargues'in tüm bu yaptığı çalışmalar 1864 yılında elden geçirilerek tekrar derlenmiş ve bir araya getirilerek *L'oeuvre mathématique de Desargues* (ed. René Taton; Paris, 1951) adıyla basılmıştır. 1864 versiyonu bu çalışmalar, Cambridge University Press tarafından 2011 yılında yeniden ele alınmıştır. Desargues hayatının son dönemlerinde ismi DALG olarak şifrelenmiş bir makale yazmış, uzun yıllar bu şifreli bilgilerin ne anlama geldiği araştırılmıştır. Nihayetinde, bu



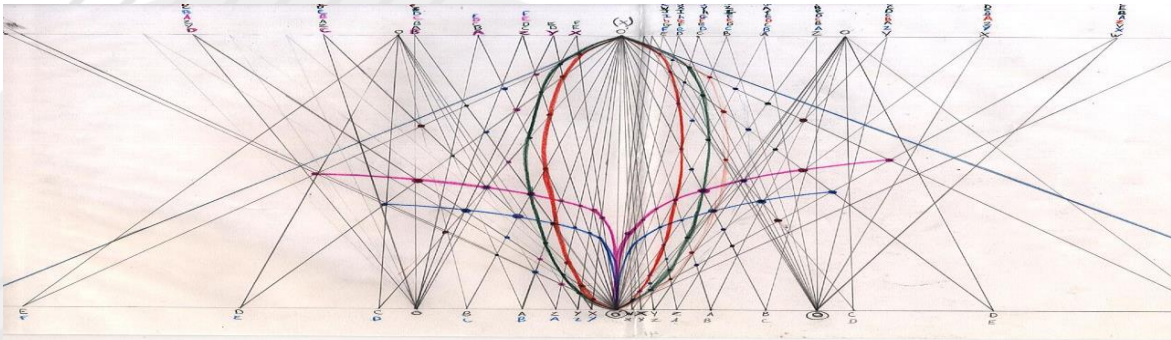
harflerin ne anlama geldiği hakkındaki en kabul gören açılım, Henri Brocard tarafından önerilen *Des Argues, Lyonnais, Géometre* olmuştur. Desargues'in çalışmalarıyla ortaya çıkan tasarı geometrisi uzay problemlerinin çözümlenmesi ve bu problemlerin grafik olarak gösterilmesini sağlayan yöntemleri içeren bir bilim dalıdır. Tasarı geometrisi, üç boyutlu olan cisimlerin bir düzlem üzerine çizilerek gösterilmesi tekniğidir.

Matematikte projektif geometri, projektif dönüşümlere göre değişmez olan geometrik özelliklerin incelenmesidir. Bu temel Öklid geometrisine kıyasla, projektif geometrinin farklı bir düzenlemeye, projektif uzaya ve seçici bir temel geometrik kavramlar dizisine sahip olduğu anlamına gelmektedir. Temel sezgiler, belirli bir boyut için yansıtılmalı uzayın Öklid uzayından daha fazla noktaya sahip olduğu ve ekstra noktaları Öklid noktalarına dönüştüren geometrik dönüşümlere izin vermesidir.

Projektif geometri, metrik olmayan temel bir geometri şeklidir, yani bir mesafe kavramına dayanmamaktadır. İki boyutta, noktaların ve çizgilerin konfigürasyonlarının incelenmesiyle başlar. İkiliğin en basit gösterimi, "iki farklı nokta benzersiz bir çizgiyi belirler" ve "iki farklı çizgi benzersiz bir nokta belirler" ifadelerinin önermelerle aynı yapıyı gösterdiği yansıtma düzleminde. Projektif geometri, yalnızca düz kenarlı yapıların geometrisi olarak da görülebilir.

Projektif geometri, esas olarak 19. yüzyılın bir gelişmesiyle ortaya çıkmıştır. Bu, karmaşık projektif uzay teorisini içermekte ve kullanılan koordinatların karmaşık sayılardan oluştuğunu göstermektedir. 19. yüzyılın başlarında Jean-Victor Poncelet, Lazare Carnot ve diğerlerinin çalışmaları projektif geometriyi bağımsız bir matematik alanı olarak kurmuştur.

Sonralarda, Johannes Kepler (1571-1630) ve Gérard Desargues (1591-1661) bağımsız olarak "sonsuzdaki nokta" kavramını geliştirmişlerdir. Desargues, ufuk noktalarının kullanımını, bunların sonsuz derecede uzakta olduğu durumları içerecek şekilde genelleştirerek perspektif çizimler oluşturma için alternatif bir yolu geliştirmiştir. Paralel çizgilerin gerçekten paralel olduğu Öklid geometrisini, her şeyi kapsayan bir geometrik sistemin özel bir durumu haline de getirmiştir.



Projektif geometrinin temel teoremi adım adım ilerlemektedir. İlk olarak, bir projektif uzay  $P$ 'sinin iki projektif çerçevesi verildiğinde birinci kareyi ikinci kareye eşleyen tam olarak bir  $P$  homografisi vardır. Sonrasında oluşan bir projektif uzayın boyutu  $P$  en az iki ise,  $P$ 'nin her bir paralel dizilimi, bir otomorfik paralelliğin ve bir homografinin bileşimidir. Özellikle, gerçekler üzerinde, en az iki boyutlu bir projektif uzayın her sıralı dizilimi bir homografidir. Son olarak, her homografi sınırlı sayıda perspektifin bileşimi olmaktadır. Özellikle, ima edilen yansıtılmalı uzayın boyutu en az iki ise, her homografi sonlu sayıda merkezi sıralamanın bileşimidir. Projektif

geometri, geometrik şekiller ve görüntüler arasındaki ilişkilerle ilgilenen matematik dalı veya onları başka bir yüzeye yansıtmaktan kaynaklanan haritalamalardır. Projeksiyonların yaygın örnekleri, bir ekranda görüntülenen opak nesnelerin ve hareketli görüntülerin oluşturduğu gölgelerdir.

Günümüzde projektif geometri, mimari ve coğrafi verilerin mekansal analizi alanlarında, uzay, grafik vb. geometri derslerinde kullanılmaktadır. Görüntülerin algılanmasına yardımcı olmaktadır. Projektif geometri ile dönüşümler yapılır, aynı kalan ve farklılık gösteren özellikler incelenir. Aynı zamanda düzlem geometri ile de ilgilidir. Örneğin; çizgileri ayıran noktalar gibi kavramları anlamak için basit kapalı eğriler de projektif geometrinin imkanlarıyla kullanılır.

Projektif geometri uzay bilimi, sanat, matematik, fizik (kuantum fiziği), mimari ve endüstri alanlarında da kullanılmaktadır.

Projektif geometri, uzay problemlerini çözme ve bu problemleri grafik olarak gösterme yöntemlerini içeren bir bilim dalı olarak kullanılmıştır. Projektif geometri, üç boyutlu nesneleri bir düzlemde çizme tekniğidir. Bu nedenle mimari, matematik, fizik gibi alanlarda da kullanılabilir. Ayrıca projektif geometri çocukların günlük yaşamdaki gelişimlerinde de kullanılmaktadır. Araştırmalara göre projektif geometri, küçük çocukların zihinsel algısında ikinci sırada yer almaktadır, bu nedenle nesnelerin zihinsel dönüşü ve dönüşünden kaynaklanan değişimini belirleme yeteneği olarak tanımlanan uzamsal görselleştirme yeteneğini geliştirdiği söylenebilir. Yani çocukların hayal gücünü ve düşünme yetenekleri de projektif geometri sayesinde artacaktır.

**Kaynaklar:**

1. <https://www.britannica.com/science/projective-geometry>
2. [https://stringfixer.com/tr/Projective\\_geometry](https://stringfixer.com/tr/Projective_geometry)

## NİCOLAS BOURBAKİ VAR MIDIR YOK MUDUR?

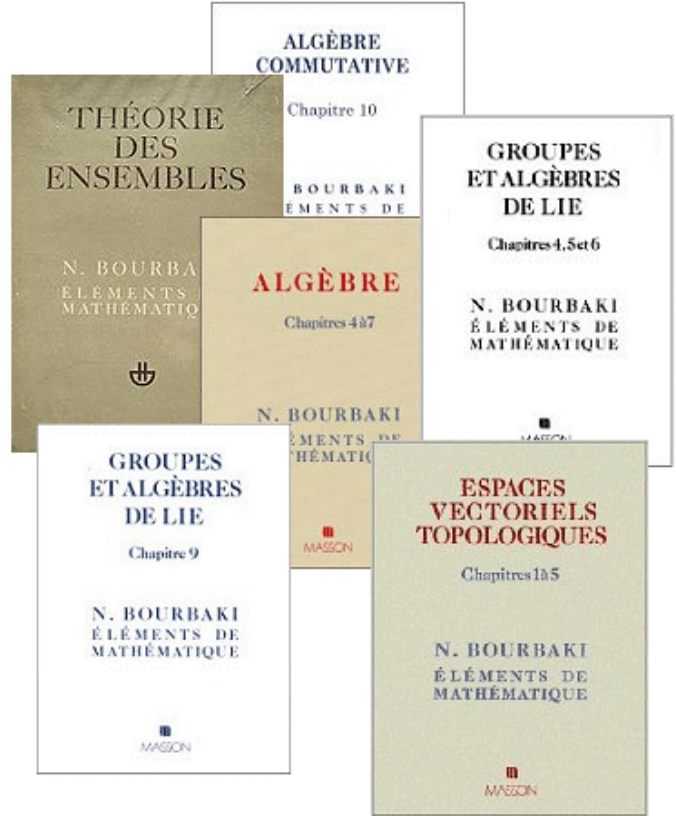
ADA DEFNE DEMİR (9-V)

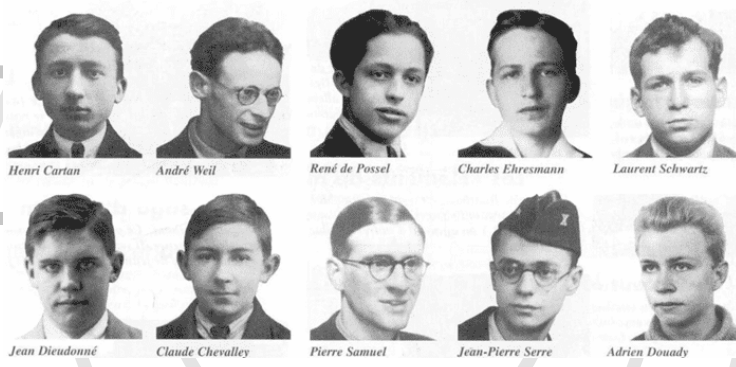
Nicolas Bourbaki'yi diğer matematikçilerden ayıran birkaç önemli detay var. Birincisi, Nicolas Bourbaki ismiyle hiçbir matematikçinin yaşamamış olması ve ikincisi, bu ismin tek bir kişiye ait olmaması. Nicolas Bourbaki esasında, bir grup 20. yüzyıl matematikçisinin altında toplandığı takma bir addır. Birazcık daha derine inip bakalım, kim(ler) bu *Nicolas Bourbaki*?

Bourbaki'nin adının isim babası olan Charles-Denis Bourbaki, 1826 yılında Fransa'nın Kuzey Afrika birliklerinde askerlik hayatına başlamıştır. Emekli olduktan ve hatta hayatını kaybettikten sonra dâhi imparatorluğun en parlak komutanlarından, ordunun saygı duyduğu liderlerden bir tanesi olmuştur.

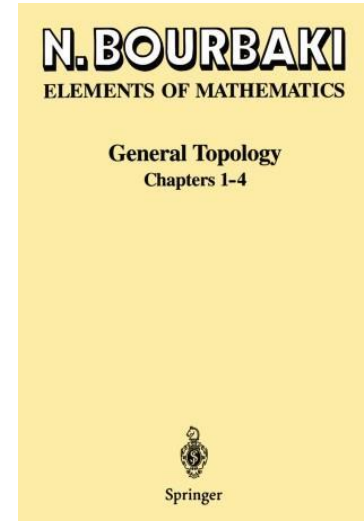
Fransa'da ün kazanmış bir okul olan "École Normale Supérieure"de yeni gelen öğrencilere yapılacak açılış konuşmasında büyük sınıflardan bir öğrencinin diğerlerine bir hoca kılığına girerek Fransız generallerin isimleriyle anılan, uydurulmuş teoremlerden söz etmesiyle başlıyor Bourbaki grubunun hikayesi. İlginç olan ise gelecekte "Bourbaki Grubu"nu oluşturacak bir grup öğrencinin bu konuşmanın dinleyicisi olarak o salonda bulunması ve bu öğrencilerin aklında kalan tek teoremin "Bourbaki Teoremi" olmasıdır.

Takvimler Aralık 1935'i gösterirken Paris'te bir kafede toplanan bir grup genç, üniversitelerinde okutulan analize giriş kitabını yetersiz bulduklarından bu kaynağı yeniden yazmaya karar verdiler. Zaman içerisinde buluşmalar düzenleyip konuları tartışacak ve herkesin içeriğe eşit derecede katkıda bulunmasına destek olacaklardı. Mükemmeli bulduklarında ise kitabı bastıracaklardı. Fakat bu aşamaya gelindiğinde herkesin aklında tek bir soru vardı: Kitaba yazar olarak kimin adı yazılacaktı? Gençlerin aklına gelen ilk çözüm, birlikte okula başladıklarında yapılan o açılış konuşmasında üst sınıfların ortaya attığı uydurma teorem olmuştu: **Bourbaki Teoremi**.





Böylece, bir analize giriş kitabı yazma amacıyla toplanan ama yazdıkları kitaplarla tüm 20. yüzyıl matematiğini derinden etkileyen “Bourbaki Grubu” da kurulmuş oldu. Grup, matematik alanında özgün çalışmalar yapıp alanlarında dönemin kalıplarını kırmak istiyordu.



Zaman içerisinde grup üyeleri değişse de günümüz matematiğinde bir hayli önem taşıyan küme teorisi, cebir, komütatif cebir, topoloji, gerçek değişkenin fonksiyonları, integrasyon gibi teorem ve çalışmaların baş mimarları olmakla birlikte boş küme sembolü ( $\emptyset$ ) ve bunun gibi daha birçok sembol ve terimi bize kazandıran da Bourbaki Grubu’ndan başkası değildi.

## BOURBAKI’NİN YOK OLUŞU

Üyeler 50 yaşlarına geldiklerinde gruptan çekilmek üzere anlaştılar. 50’li yıllarda hemen hemen tüm üyelerin 50 yaşını aşması nedeniyle Nicolas Bourbaki’nin öldüğünü dile getirmeyi seçtiler. Buna rağmen grubun yeni üyeleri Bourbaki öldü diyenlere cevaplarını 2016’da *Cebirsel Topoloji* hakkında güncel bir kitap çıkartmalarıyla vererek Bourbaki’nin modern matematik anlayışını 21. yüzyılda da devam ettireceklerini belirtmiş oldular.



### Kaynaklar:

1. <https://muse.jhu.edu/article/727212#:~:text=Aczel%2C%20The%20Artist%20and%20the,of%20structuralism%20as%20a%20whole.>
2. <https://services.tubitak.gov.tr/ederqi/yazi.pdf;jsessionid=drvqqQZoAm8L26NG-X4hwwQi?dergiKodu=4&cilt=49&sayi=924&sayfa=66&yaziid=39439>
3. <https://tr.thetopknowledge.com/nicolas-bourbaki-french-group-mathematicians>

MİRAY AKTAN (12-Z)

Maria Gaetana Agnesi, 16 Mayıs 1718'de Milano'da zengin ve okur yazar bir ailenin çocuğu olarak dünyaya geldi. O, yirmi üç kardeşin en büyüğüydü. Babası matematik profesörüydü ve ona derin bir eğitim sağladı. O dönemin en büyük sıkıntılarından biri olan eğitim ve dönem içi karışıklar, kadınların alması gerektiği eğitimden mahrum bıraktı. Orta çağ boyunca, Hristiyan aleminin etkisi altında, birçok Avrupa ülkesi, kadınlar için herhangi bir öğretim biçimine karşı çıktı. Çoğunlukla, öğrenme kızlar için manastırlar ve rahibe manastırlarıyla sınırlıydı.

Maria, annesi doğumda öldüğü için, evin en büyük kadını olmuştur ve eğitimini arka plana atarak kardeşlerini büyüttü. Evin zeki ve yetenekli bireyi olarak kendisini dine ve matematiğe vermişti. Matematiksel çalışmalarını Calculus üzerine yaptı.



Maria Agnesi kitabını İtalyanca yazmıştır. İlerleyen yıllarda kitabın başka dillere çevrilmesiyle "Cadı" adı yanlış tercüme sonucunda doğar. 1718 yılında eğriye, sinüs eğrisi anlamına gelen Latince versoria adı verilir. İngilizceye çevirisi esnasında sözcük, cadı anlamına gelen "avversiera" olarak anlaşılmıştır. Bu yanlış tercüme sonucu, üstünden 250 yıl geçmiş olsa bile eğri hala kullanılmaktadır. Özellikle matematiksel modelleme ve istatistik alanında karşımıza çıkmaktadır.



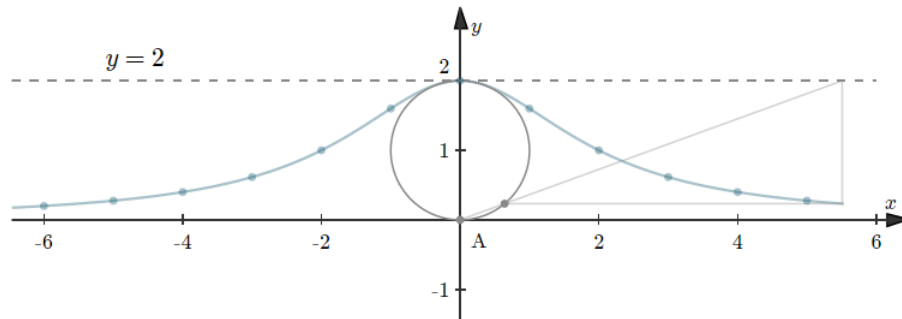
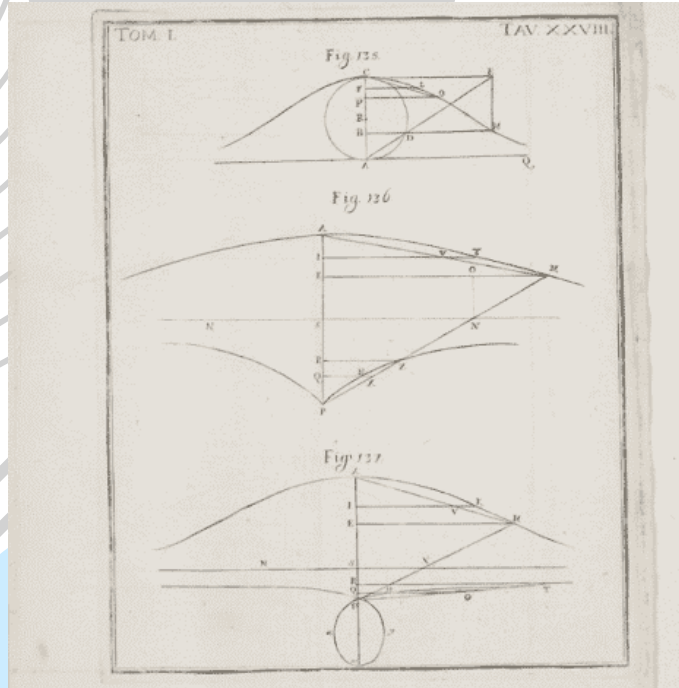
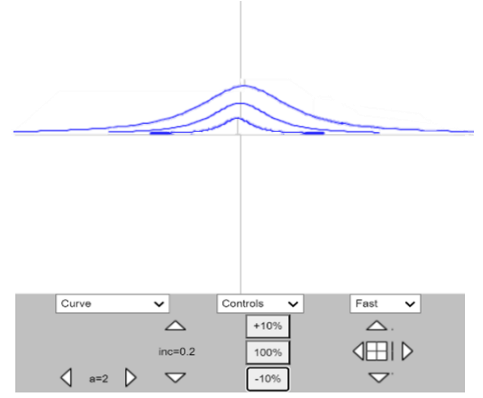
Basit geometri hesaplamaları ile Agnesi eğrisi adından da anlaşılacağı üzere bir eğri oluşturmaktadır.  $x$  yatay ve  $y$  düşey eksenler olarak referans alınmıştır. Agnesi Cadısı (the witch of Agnesi) eğrisinin denklemi,  $a$  bir sabit sayı olmak üzere

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

veya

$$xy^2 = a^2(a - x)$$

biçimindedir. Ancak eğri ne bir cadıya benzer ne de adı bilerek konulmuştur. Yukarıda hikayesi anlatıldığı gibi, bir çeviri hatası sonucu ismi Agnesi Cadısı olmuştur. Bu eğriyi oluşturabilmek için  $a$  değerine 1, 2 ve 3 değerlerini verilirse, eğrilerin sırayla  $y$  ekseninde görseldeki gibi pozitif yönde spektral çizgilerin enerji dağılımını tahmin etmekte kullanılır.



*Sekil 1: The Witch of Agnesi*



## FAKTÖRİYELE FARKLI BİR BAKIŞ: STİRLİNG FORMÜLÜ

**DAMLA ALKAN (9-Y)**

Günümüzde faktöriyel kavramı özellikle nesneleri düzenlemenin farklı yollarının sayısını hesaplarken önemlidir. Ayrıca sayı teorisi, olasılık ve matematikte de sıkça karşımıza çıkmaktadır. Sembolü “!” dir. Bir de tanımını hatırlayalım; faktöriyel hesapları negatif olmayan  $n$  tam sayıları için  $n$ ’den küçük veya ona eşit tüm pozitif tam sayıların çarpımını ifade eder. Örneğin;  $4!$  “dört faktöriyel” diye okunur ve  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$  olarak hesaplanır. Bu gösterim biçimi de Fransız matematikçi Christian Kramp tarafından 1808’de matematik dünyasına tanıtılmıştır. Faktöriyel hesabını günlük yaşamımızda yaptığımız sıralamalarda da kullanabiliriz. Örneğin, 3 farklı renkte gömleği ve 2 farklı renkte pantolonu olan birisinin bu kıyafetleri kaç farklı şekilde kombinleyebileceği sorusunun cevabı  $3! \times 2!$  dir. Bu da kıyafetlerin  $6 \times 2 = 12$  farklı biçimde kombinlenebileceği anlamına gelmektedir.

Oyun kartlarının sıralanması ya da oyuncuların seçilmesi gibi sıralama-dizme gerektiren birçok konuda faktöriyel kavramı karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca, bilgisayar programlama, mühendislik, mimarlık gibi meslek gruplarında da sıkça kullanılan bir kavramdır. Buraya kadar aslında birçoğumuzun hemen hemen aşına olduğu sayma işleminden başka bir şey değildir.

Faktöriyeler ile ilgili bir sorun ise elde edilen sonuçların çok hızlı büyümesidir. Buna örnek olarak iskambil kağıtlarını verebiliriz. Elinizde 52’lik bir iskambil kâğıdı destesi olduğunu ve bunu düzenlemek istediğinizi düşünelim. Bu durumda 52 farklı kart,

$$52! = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = 8.06582 \times 10^{67}$$

farklı biçimde düzenlenebilir.

$52!$ ’in ne kadar büyük bir sayı olduğunu tarif etmek hiç basit bir iş değildir. Şu anda hayatta olan tüm insanlar, evren oluştuğundan beri her saniyede bir kart destesi karıştırmış olsaydı, bu sadece  $3 \times 10^{27}$  karıştırmaya denk gelirdi. Aslında bu sayı,  $8.06582 \times 10^{67}$  sayısı ile karşılaştırıldığında inanılmaz derecede küçük bir sayı olurdu.

### STİRLİNG FORMÜLÜ NEDİR?

$52!$  sayısı, yeterince sabrınız ve bir hesap makineniz var ise hesaplanabilir. Ama bu hem kolay değildir hem de hata yapmaya açık bir yöntemdir. Bunun yerine İskoç matematikçi James Stirling’in (1692-1770) adını taşıyan herhangi bir faktöriyel hesabının sonucunu yaklaşık olarak bulmamızı sağlayan bu etkileyici formülü kullanabiliriz.

Newton’un yakın arkadaşı olan James Stirling günümüzde 1730 yılında kaleme aldığı “Methodus Differentialis” isimli kitabı ve soyadını taşıyan “Stirling Formülü” ile bilinir. Bu formül,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

olarak bilinmektedir. Burada “e” sayısı ise, euler sayısı olarak bilinmektedir ve yaklaşık değeri  $e = 2,71828182845904523536..10$ ’dir.

Bu formülde  $n$  yerine 52 yazdığımızda sonuç  $8.094 \times 10^{67}$  olacaktır, ki bu yazının başlarında verdiğimiz sonuca oldukça yakın bir cevaptır.

1992’de Bayer ve Diaconis, 52 kartlık bir destenin riffle shuffle denilen yöntemle yedi kez rastgele karıştırılmasından sonra, her dizilimin neredeyse eşit derecede olası olduğunu gösterdi. Bunun anlamı şudur: Krupiye, karıştırmayı hata yapmadan yapabilirse iskambil kağıtları sadece sekiz mükemmel karıştırma işleminden sonra ambalajlarından ilk çıktıkları zamandaki sıralamasına geri dönebilir.



*Sekil 1: Riffle shuffle*

Daha abartılı bir örnek vermek gerekirse; 10.000! sayısını hesaplamak için hesap makinesinde 10.000’den 1’ e kadar 10.000 adet sayıyı hatasız olarak yazıp çarpmak gerekir. Bunun yerine Stirling Formülü ile gerçek sonuca çok yakın bir sonuç elde edebiliriz. Ayrıca, bu tür uzun bir işlemi Stirling Formülü ile çözmek daha kolay bir şekilde sonuca ulaşmamıza yardımcı olur.

Eğer Riffle Shuffle denilen yöntemi öğrenmek isterseniz sağdaki QR kodunu okutmanız yeterli!

**Kaynak:**

1. Çağlar, S., 2020. Faktöriyel Hesaplarına Farklı Bir Yaklaşım: Stirling Formülü. [online] Matematiksel. Available at: <https://www.matematiksel.org/faktoriyel-hesaplarina-farkli-bir-yaklasim-stirling-formulu/> [Accessed 12 February 2022].



Riffle Shuffle Tutorial

“Şık” kavramıyla hayatımızın birçok yerinde karşılaşmışsınız. Peki, bu sıfatın matematikteki karşılığı nedir? Pek çok matematikçiye göre matematiğin en güzel formülü Euler formülüdür:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Bu formülün güzelliği, matematikteki en önemli sabitlerden beş tanesini tek formülde toplamasıdır. İlk bakışta aralarında nasıl bağlantı kurulabileceği anlaşılamayan bu sabitler, bu formülle birbirleriyle ilişkilendirilmiştir. Bu sabitler ve temsil ettikleri ifadeler şu şekildedir:

- Euler Sabiti ( $e$ ): Bu sayı 2.71828... şeklinde devam eder ve bu sayının bir sonu yoktur. Doğal logaritmanın tabanıdır ve üstel sayılarda büyük öneme sahiptir.

"e" sayısı veya Euler sayısı; matematik, doğal bilimler ve mühendislikte önemli yere sahip bir irrasyonel sayıdır. "e" sabitine ilk değinen kişi İskoç matematikçi John Napier'dir. Napier, 1618'de logaritmalar hakkındaki kitabında "e" sabitini kullanarak bazı hesaplar yapmıştır fakat; sabitin kendisiyle fazla ilgilenmemiştir. "e" sayısını gerçek anlamda ilk keşfeden Jakob Bernoulli olmuştur. Bernoulli, "e" sayısını birleşik faiz problemleriyle ilgilenirken 1683'te keşfetmiş ve bu sayının yaklaşık değerini hesaplamıştır. Bu sabite ismini veren ise İsviçreli matematikçi Leonhard Euler'dir. Euler bu sabite "e sayısı" diye ilk olarak 1731'de Christian Goldbach'a yazdığı bir mektupta bahsetmiştir. Euler "e" sayısını, virgülden sonra 23. basamağına kadar hesaplayabilmiştir. Günümüzde ise "e" sayısının milyarlarca basamağı bilinmektedir. "e"nin irrasyonel bir sayı olduğu Euler tarafından, aşkın bir sayı olduğu ise Fransız matematikçi Charles Hermite tarafından kanıtlanmıştır. "e" sayısının uygulamaları arasında bileşik faiz problemi, Bernoulli denemeleri ve şapka problemi yer alır.

- Pi Sayısı ( $\pi$ ): 3.14159... şeklinde devam eden ve yine sonu olmayan bu sayı herhangi bir çemberin çevresinin çapına oranını ifade eder.

- Sanal Sayı Birimi ( $i$ ): Bu sayı  $\sqrt{-1}$  'e karşılık gelir. Karmaşık sayı sisteminde bir sayının "sanal" olarak ifade edilen kısmını tanımlamakta kullanılır.

- Sıfır (0): Genellikle "boş" ve "hiç" kavramlarıyla ilişkilendirilen bu sayı ne pozitif ne de negatiftir. Toplama işleminin etkisiz elemanı olmasından dolayı bir sabit olarak görülebilir.

- Bir (1): En küçük pozitif tam sayıdır. Aynı zamanda "birim sayı" olarak da bilinir. Herhangi bir şeyin tek başına olmasını ifade eder. Çarpma işleminin etkisiz elemanı olmasından ötürü bir sabit olarak görülebilir.

Euler formülü böylesine karmaşık sayıları bir araya getirerek oldukça yalın bir sonuca ulaşması açısından özeldir ve “şıklığını” buradan alır. Bunun yanı sıra matematiksel işlemlerden ve ilişkilerden dördünü (toplama, çarpma, üs alma ve eşitlik) birleştiren bir formül olmasıyla da değerlidir.

### Euler Formülü Ne Anlama Gelir?

Euler formülü karmaşık analizde kullanılan bir matematik formülüdür ve trigonometrik fonksiyonlarla karmaşık üstel fonksiyon arasındaki bağlantıyı gösterir. Aslında Euler formülü, türevi kendisine eşit olan  $e^t$  şeklinde ifade edilebilecek üstel fonksiyonun bir versiyonudur. Bir bakıma formülün ifade ettiği şey şudur:

$$e^{i\pi} = -1$$

### Formülün İspatı – Kuvvet Serileri

Öncelikle üstel fonksiyonların kuvvet serilerinin tanımından yararlanarak  $e^t$  ifadesini şu şekilde yazarız:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Taylor Serisi:** Taylor serisi matematikte, bir fonksiyonun, o fonksiyonun terimlerinin tek bir noktadaki türev değerlerinden hesaplanan sonsuz toplamı şeklinde yazılması şeklindeki gösterimi/açılımıdır.

Her dereceden türevli, gerçel ya da karmaşık bir fonksiyonunun a gerçel ya da karmaşık bir sayı olmak üzere  $(a - r, a + r)$  aralığındaki Taylor serisi şu şekilde tanımlanmıştır:

$e^x$  'in Maclaurin Serisi:

Taylor Serisi'nde  $a = 0$  özel durumunda elde edilen seriye Maclaurin serisi denir.

Öncelikle  $e^x$ 'e yakınsayan seri bulunur.

$$f(x) = e^x$$

“e” sayısının özelliklerinden birini kullanarak  $e^x$  'in türevleri  $e^x$  'e eşitlenir.

$$f(x) = e^x = f'(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) \dots$$

Bunu belirttikten sonra Maclaurin serisini bulalım:

$$e^0 = 1 = f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0)$$

$e^x$ , Maclaurin serisiyle belirtilecek olursa sonsuz adede doğru terim ekledikçe serinin değeri, fonksiyonun değerine yaklaşacaktır.

Baştaki tanımdan yola çıkıldığında:

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Bundan yola çıkarak  $e^{i\pi}$  sayısını şu şekilde açarız:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!} + \frac{(i\pi)^4}{4!} + \frac{(i\pi)^5}{5!} + \frac{(i\pi)^6}{6!} + \frac{(i\pi)^7}{7!} + \frac{(i\pi)^8}{8!} \dots \\ &= 1 + i\pi - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{i\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{i\pi^5}{5!} - \frac{\pi^6}{6!} - \frac{i\pi^7}{7!} + \frac{\pi^8}{8!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \dots\right) + i\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots\right) \end{aligned}$$

|                       |                  |
|-----------------------|------------------|
| $f(x) = \cos x$       | $f(0) = 1$       |
| $f'(x) = -\sin x$     | $f'(0) = 0$      |
| $f''(x) = -\cos x$    | $f''(0) = -1$    |
| $f'''(x) = \sin x$    | $f'''(0) = 0$    |
| $f^{(4)}(x) = \cos x$ | $f^{(4)}(0) = 1$ |

|                        |                   |
|------------------------|-------------------|
| $f(x) = \sin x$        | $f(0) = 0$        |
| $f'(x) = \cos x$       | $f'(0) = 1$       |
| $f''(x) = -\sin x$     | $f''(0) = 0$      |
| $f^{(3)}(x) = -\cos x$ | $f^{(3)}(0) = -1$ |
| $f^{(4)}(x) = \sin x$  | $f^{(4)}(0) = 0$  |

Birinci, üçüncü ve örüntünün devamı olarak beşinci, yedinci (...) türevlerin değerinin 0 olmasından dolayı bu terimlerle çarpılan ifadeler yazılmaz. Buna ek olarak ikinci, altıncı, onuncu (...) türevlerin işareti negatif; dördüncü, sekizinci, on ikinci (...) türevlerin işareti pozitif olduğundan seri (+), (-), (+), (-) olacak şekilde ilerler.

Fonksiyonun kendisinin, ikinci ve örüntünün devamı olarak dördüncü, altıncı (...) türevlerin değerinin 0 olmasından dolayı bu terimlerle çarpılan ifadeler yazılmaz. Buna ek olarak üçüncü, yedinci, on birinci (...) türevlerin işareti negatif; birinci, beşinci, dokuzuncu (...) türevlerin işareti pozitif olduğundan seri (+), (-), (+), (-) şeklinde ilerler.

Bir serinin mutlak değerlerinden oluşturulan seri yakınsaksa baştaki seriye mutlak yakınsak seri denir ve bu baştaki serinin de yakınsak olması anlamına gelir. Bir serinin yakınsak olması da o serinin kısmi toplamalarının bir limit değeri olması ve terimlerin sıfıra yaklaşması demektir. Bu seriler mutlak olarak yakınsak olduğu için terimlerden ilki  $\cos(x)$ , ikincisi  $\sin(x)$  fonksiyonlarının Maclaurin açılımlarıdır. Bundan yola çıkarak eşitliği şu hâle getirebiliriz:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

$\cos(\pi) = -1$  ve  $\sin(\pi) = 0$  olduğu için:

$$e^{i\pi} = -1$$

Formüle bilinen “şık” hâlini verecek olursak da şu sonuca varırız:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

### Formülün İspatı – Geometrik İspat

Bu formülün geometrik ispatının anlaşılmasının kolaylaşması için matematikle fizik arasında bir bağlantı kurabiliriz. Matematikteki türev kavramı fizikte konumun zamana göre değişimine yani hıza eşittir. Buna göre  $e^t$  ifadesinin bir cismin konumunu belirttiğini varsayalım. Bu ifadenin türevi her zaman kendisine eşit olduğundan bu durumun yaptığımız benzetmede karşılığının bir cismin konumunun her zaman hızıyla orantılı olmasına karşılık gelir. Bu da başlangıç noktasından uzaklaştıkça hızın ve ona orantılı olarak konumun sürekli artması anlamına gelir.

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^t} = \boxed{e^t} \quad e^0 = 1$$

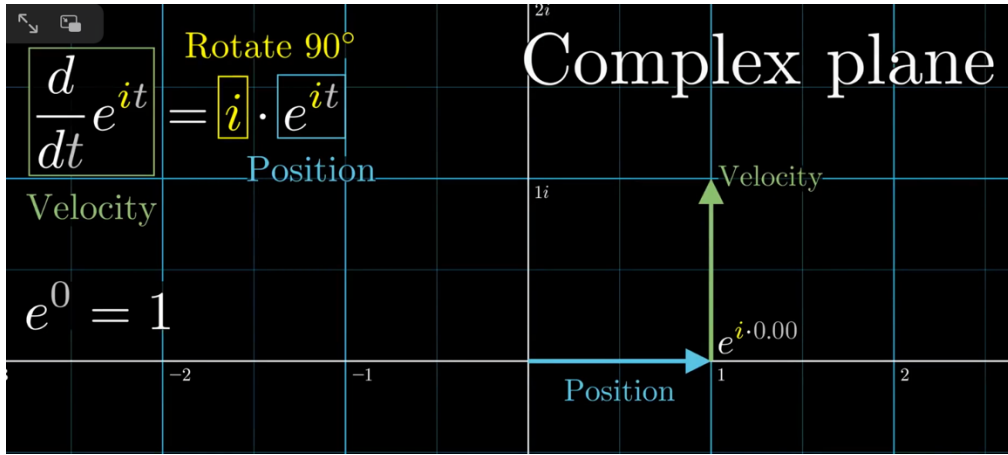
Velocity      Position

$e^t$  yerine  $e^{2t}$  olması ise başlangıç noktasından uzaklaştıkça hızın uzaklaşma miktarımızın 2 katı olacağı anlamına gelir. Bunun sebebi  $e^{2t}$  ifadesinin türevinin  $2e^{2t}$  olmasıdır.

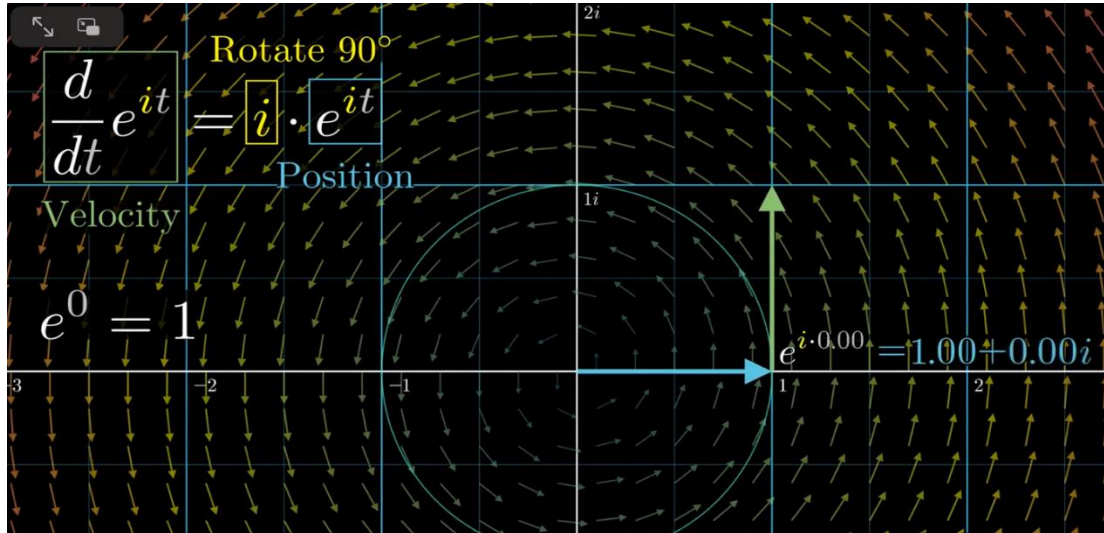
$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{2t}} = \boxed{2} \cdot \boxed{e^{2t}} \quad e^0 = 1$$

Velocity      Double      Position

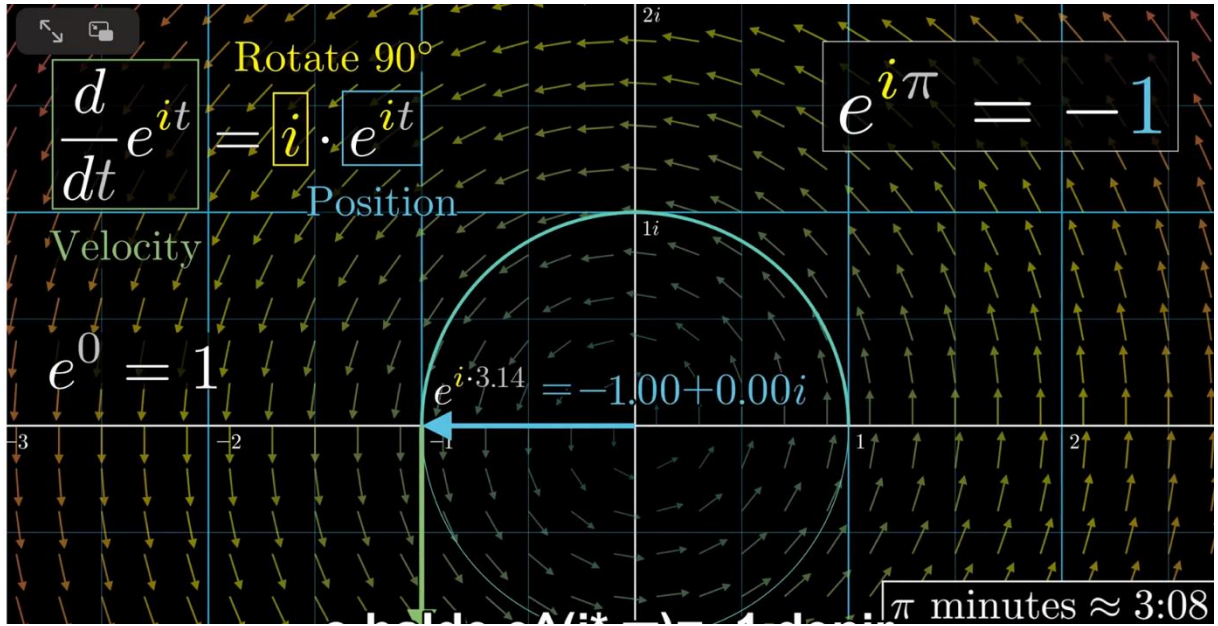
Buradan yola çıkarak  $e^{it}$  ifadesinin türevinin  $ie^{it}$  olacağını söyleyebiliriz. Hız vektörünün  $i$  ile çarpılması onun sayı doğrusundan çıkarak, bir eksen gerçek sayılar, diğer eksen sanal sayılar olan karmaşık düzlemde 90° döndürülmesi anlamına gelir.



Bu durumda başlangıç noktasından uzaklaştıkça gittiğimiz yöne 90°'lik döndürülmüş hızla ilerleriz. Bu hareket karmaşık düzlemde gösterildiğinde cismin sürekli bir daire etrafında döndüğü görülür.



$\pi$  süre sonra yani  $e^{i\pi}$ 'ye ulaşıldığında konumumuz başlangıca göre tam 180° ters olur. Öyleyse 0'da başlayan bir cisim  $\pi$  süre sonra 1'e gitmek yerine -1'e gider.



Bu durumda:

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

### Euler Formülünün Uygulamaları

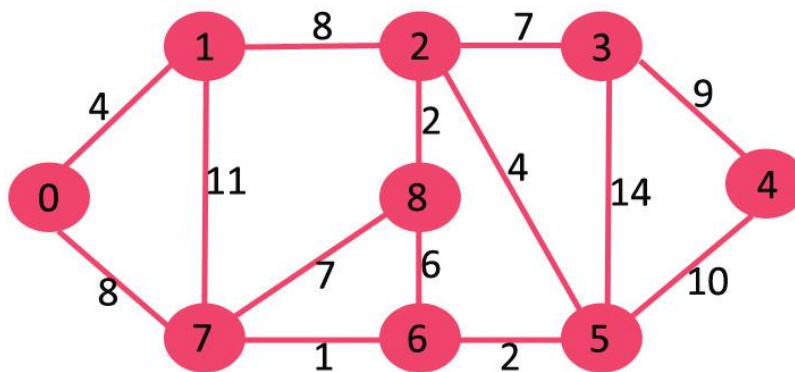
Euler formülü matematiğin birkaç temel bileşenini tek formülde toplaması güzelliğine ek olarak fazlaca farklı kullanım alanına sahiptir. Bunlar arasında karmaşık sayılar düzleminde bir birim çember çizmek ve kartezyen koordinatlarla kutupsal koordinatlar arasında geçiş yapmak yer alır. Kutupsal koordinat sistemi ise noktaların birer açı ve kartezyen koordinat sistemindeki orijinin eşdeğeri olup "kutup" olarak bilinen bir merkez noktaya olan uzaklıklar ile tanımlandığı, iki boyutlu bir koordinat sistemidir.

### Kaynaklar:

1. <https://www.matematiksel.org/euler-formulu-neden-en-guzel-formuldur/>
2. <https://bilimfili.com/esitliklerin-en-guzeli-euler-formulu>
3. <http://bilimveaydinlanma.org/bir-dakikada-matematik-euler-formulu/>
4. <https://evrimagaci.org/matematiğin-en-guzel-formulu-euler-formulu-nedir-8250>
5. <http://www.cncdesigner.com/wordpress/?p=570>
6. <https://tr.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-series-new/bc-10-14/v/taylor-series-at-0-maclaurin-for-e-to-the-x>
7. [https://tr.wikipedia.org/wiki/Euler\\_formülü](https://tr.wikipedia.org/wiki/Euler_formülü)
8. [https://tr.wikipedia.org/wiki/Kutupsal\\_koordinat\\_sistemi](https://tr.wikipedia.org/wiki/Kutupsal_koordinat_sistemi)
9. [https://tr.wikipedia.org/wiki/Taylor\\_serisi](https://tr.wikipedia.org/wiki/Taylor_serisi)

Hiç navigasyon uygulamalarının nasıl çalıştığını, gitmek istediğiniz yere en kısa yolu nasıl gösterdiklerini merak ettiniz mi? Çok basitmiş gibi gözükse de navigasyon uygulamaları aslında yolun yoğunluk durumu, seyahat saati, yol çalışmaları nedeniyle kapalı olan yollar gibi birçok değişkeni hesaba katarak en uygun yola karar vermek için bir dizi birleşik algoritma ve matematiksel hesaplama kullanırlar. En çok kullanılan algoritmalarından biri “Dijkstra Algoritması”dır.

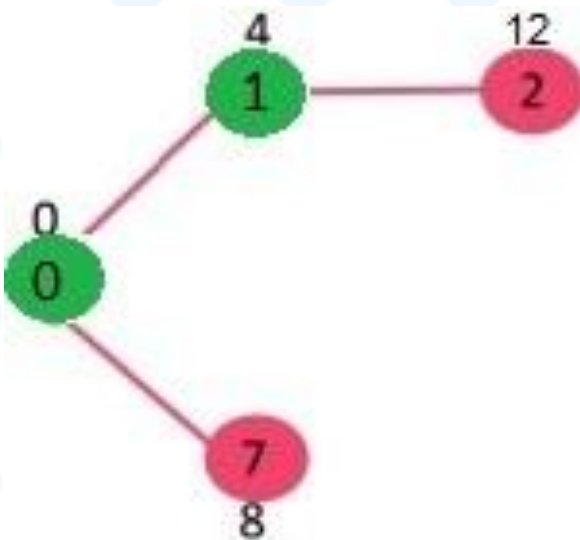
Peki Dijkstra Algoritması nedir? 1959'da Hollandalı Bilgisayar Bilimcisi Edsger Dijkstra tarafından bulunan Dijkstra Algoritması, ağırlıklı grafikler üstünde uygulanabilen uzaklık ve mesafe hesaplama sistemidir. “Ağırlıklı grafikler” ifadesindeki ağırlık mesafe veya zaman gibi bir değeri temsil eder, bu değer değişebildiği için ağırlıklı grafik olarak adlandırılır. Grafikteki son noktaya (vertexe) giden birçok yol seçeneği arasından en kısa olan mesafeyi verir. Kaynak, yani source noktası (başlangıç noktamız) ve diğer tüm noktalar arasındaki yolun uzunluğunu en aza indirmek için grafiklerdeki noktaların ağırlıklarını (aşağıdaki grafikte üstlerinde yazan değerleri) kullanan sürekli kendini tekrarlayarak uzun bir **iteration** (istenilen sonuca ulaşana kadar kendine tekrarlamaya verilen isim) sistemi benimseyen algoritmadır. Sadece tüm ağırlıklar, yani değerler, pozitif değerdeyken uygulanabilir çünkü algoritmanın amacı en optimize yolu bulmaktır. Eğer negatif değerlerle çalışması mümkün olsaydı en uygun değeri değil, olabilecek tüm değerleri hesaplamış olurdu. Dijkstra algoritması, değeri okunan ve işaretlenen noktaya bir daha geri dönmemeyi temel alır ancak negatif değerler algoritmanın yapısını bozmaktadır. Bu yöntem, doğası nedeniyle tek-kaynaklı en kısa yol algoritması olarak da adlandırılır. Gerçek mesafenin yaklaşık bir değerinin, daha kısa bir mesafe elde edilene kadar sürekli olarak daha uygun değerlerle değiştirildiği **Relaxation** (verilen veri kümesi içerisinde incelenen değer, algoritmanın elindeki en kısa değerden daha az ise en kısa değer güncellenmesi ilkesidir) ilkesine dayanır. Bu algoritma, birçok programlama diline uygulanabildiği gibi gerçek dünyadaki uygulamalarda da kullanılabilir. Daha iyi anlamak için aşağıdaki Python Programlama Dilinin algoritmayı kullanma sürecini daha detaylı



inceleyeceğiz. Daha iyi anlaşılması için algoritmanın uygulanabileceği, ağırlıklı grafik verilmiştir. Algoritmada verilen değerleri grafikte göreceğimiz sırayla işlemektedir.

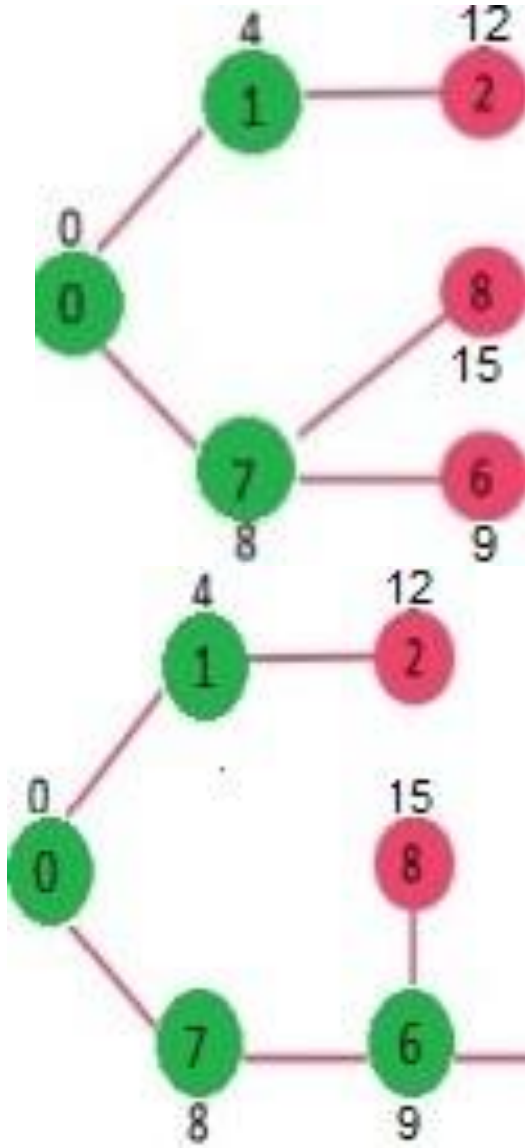
İlk olarak, yol ağacının da, noktalarının da içinde saklandığı, kullanıcı tarafından algoritmaya verilen tüm noktaların takip edilip üzerinde **iteration** ve **sequencing** (istenen değere ulaşana kadar algoritmanın belirli basamaklarını sürekli tekrarlama ilkeleri) işlemleri yapılacak dijkstrasSet adlı liste veri tipine sahip bir değişken oluşturalım. Programlama dillerinde üzerinde iteration ve sequencing yapılacak veri tipleri genellikle liste adı verilen veri tiplerinde saklanır. Liste veri tipi, işlem olanaklarının fazla olmasından dolayı sıkça kullanılır. Bu küme boş olarak başlatılır [0, INF, INF, INF, INF, INF, INF, INF] ve INF henüz bir hesaplama yapılmadığı için sonsuz değerini ifade eder. Şimdi, algoritma verdiğimiz kaynaktan başlayarak minimum uzaklık değerine sahip noktayı seçer ki bu şu an başlangıç noktasının kendisidir, böylece 'nokta 0' dijkstrasSet eklenir ve setimiz [0] olur ([ işaretini yazılımda liste veri tiplerinde sıkça kullanılır).

Bundan sonra, bitişik noktaların mesafe değerleri sürekli olarak güncellenecektir. Bitişik noktalar 1 ve 7'dir ve bunların uzaklık değerleri algoritma tarafından 4 ve 8 olarak güncellenir, çünkü kaynaktan onlara olan uzaklık sırasıyla 4 ve 8'dir. Yoluna devam edebilmek için aralarından minimum değere sahip noktayı seçer. Şu anda hala en iyi yolu seçmek için tekrarlama yapacağından seçilen bu en kısa değere sahip nokta (nokta 1) en kısa yol rotasında eklenmemiştir. Eğer ekleseydi algoritma en kısa yol bulundu şeklinde sonuç verip sonlanırdı ve diğer alternatif yollara bakma gereği duymazdı, bu da hatalı sonuç verirdi. 'Nokta 1' daha kısa olması sebebiyle seçilir ve dijkstrasSet eklenir. dijkstrasSet eklenmesinin sebebi kontrol edilen noktaların algoritma tarafından hafızada tutulmasıdır. Bu tekrar aynı noktaya gelmeyi engeller. Listemizin elemanları şu anda [0, 1] şeklindedir.



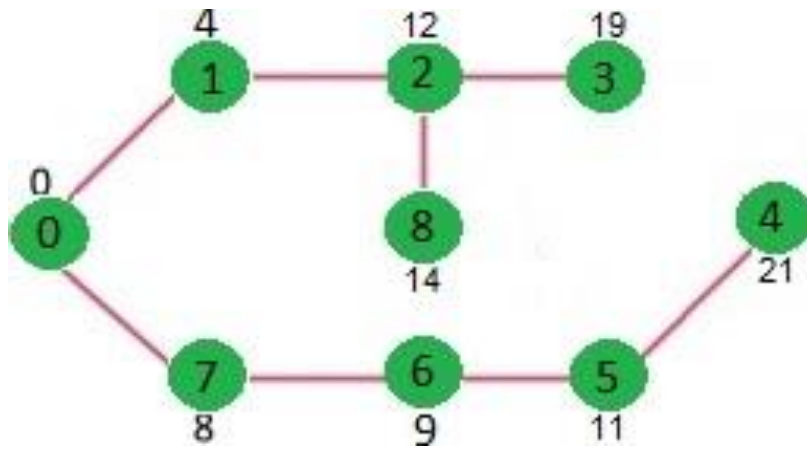
Nokta 1'i seçtikten sonra şimdi nokta 1'e komşu noktaların uzaklık değerleri güncellenmelidir ve 'nokta 2' 12 olacak şekilde güncellenir. İlk başta 8'di ancak 1'e gitmek için gereken mesafe artık 4 olduğu için  $8 + 4 = 12$  oldu. Şimdi ise algoritma başta kontrol edilmeyen ve seçilmemiş olan kaynak noktamıza minimum uzaklık değerine sahip bir nokta seçimine dönüyor, yani şimdi 'nokta 7' seçilmiş oluyor. Geriye dönmesindeki amaç alternatif yolları da değerlendirmek ve olanakları arttırarak en sonda elde edeceğimiz mesafenin en kısa olmasını sağlamaktır. Böylece

dijkstrasSet [0, 1, 7] olur. Daha sonra 7'nin bitişik noktalarının değerlerini günceller, böylece 6 ve 8'in uzaklık değerleri 15 ve 9 olarak güncellenir.



Şimdi ise, algoritma en son kontrol ettiği yere en yakın olan uzaklık değerine sahip noktayı seçer, bu durumda 'nokta 6' seçilir ve dijkstrasSet güncellenir: [0, 1, 7, 6]. Ardından, "nokta 6"nın komşu (5 ve 8 noktaları) noktalarının değerlerini günceller. Nokta 5 ve 8'in değeri güncellenir.

Yukarıdaki adımlar, dijkstrasSet grafikteki tüm noktaları içerene kadar tekrarlanır. Her şey yapıldığında, algoritma aşağıdaki güncellenmiş şekli olan, her noktaya en kısa yol rotasını verir. Bu değerler, her bir noktaya, kaynaktan çıkarak süren en kısa yolculuğun uzunluğunu temsil eder. Önemli bir detay ise nokta 8'den çıkan bağlantılar silinmesidir. Bunun sebebi algoritmanın hesaplamaları sonucu en kısa yolun yukarıdan gelerek nokta 8 ile bağdaşmamasıdır. İşlemleri sadeleştirmek için o bağlantı otomatik olarak silinmiştir.



Şimdi bu algoritmanın Python'daki uygulamasına bir göz atalım.

```
File Edit Selection View Go Run Terminal Help
C:\Users\Alperen\Desktop\DERS_10\CODING> Image.py WeightedGraph > dijkstrasShortestPath

1 import sys
2 class WeightedGraph():
3
4     def __init__(self, vertices):
5         self.Vertices = vertices
6         self.graph = [[0 for column in range(vertices)]
7                       for row in range(vertices)]
8
9     def printShortestPath(self, distance):
10        print("Vertex \tDistance from Source")
11        for node in range(self.Vertices):
12            print(node, "\t", distance[node])
13
14
15    def minimumDistance(self, distance, dijkstrasSet):
16
17        # Initialize minimum distance for next node
18        minimum = sys.maxsize
19
20        # Search not nearest vertex not in the
21        # shortest path tree
22        for a in range(self.Vertices):
23            if distance[a] < minimum and dijkstrasSet[a] == False:
24                minimum = distance[a]
25                minimumIndex = a
26
27        return minimumIndex
28
29
30    def dijkstrasShortestPath(self, source):
31
32        distance = [sys.maxsize] * self.Vertices
33        distance[source] = 0
34        dijkstrasSet = [False] * self.Vertices
35
36        for cout in range(self.Vertices):
37
38
39            x = self.minimumDistance(distance, dijkstrasSet)
40
41            # Put the minimum distance vertex in the
42            # shortest path tree
43            dijkstrasSet[x] = True
44
45            for y in range(self.Vertices):
46                if self.graph[x][y] > 0 and dijkstrasSet[y] == False and \
47                    distance[y] > distance[x] + self.graph[x][y]:
48                    distance[y] = distance[x] + self.graph[x][y]
49
50        self.printShortestPath(distance)
51
52
53    # Driver program
54    g = WeightedGraph(9)
55    g.graph = [[0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0],
56              [4, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 11, 0],
57              [0, 8, 0, 7, 0, 4, 0, 0, 0, 2],
58              [0, 0, 7, 0, 9, 14, 0, 0, 0, 0],
59              [0, 0, 0, 9, 0, 10, 0, 0, 0, 0],
60              [0, 0, 4, 14, 10, 0, 2, 0, 0, 0],
61              [0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 6],
62              [8, 11, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 7],
63              [0, 0, 2, 0, 0, 0, 6, 7, 0]
64              ]
65
66    g.dijkstrasShortestPath(0)
```

Öncelikle, kodladığımız WeightedGraph (ağırlıklı grafik) sınıfından bir obje oluşturuyoruz. Daha sonra bu objeyi kullanarak WeightedGraph sınıfının metodlarından olan graph() metodunu çağırıyoruz ve içine örnek olması için çeşitli değerler veriyoruz. Bu değerler, incelediğimiz grafikteki vertexlerin (noktaların) ağırlıkları yerine geçmektedir. En son olarak da dijkstrasShortestPath() metodu ile grafik üzerinden anlatılan her işlemi yapacak metodu çağırarak ekrana sonuçları bastırıyoruz.

| Vertex | Distance from Source |
|--------|----------------------|
| 0      | 0                    |
| 1      | 4                    |
| 2      | 12                   |
| 3      | 19                   |
| 4      | 21                   |
| 5      | 11                   |
| 6      | 9                    |
| 7      | 8                    |
| 8      | 14                   |

Buradaki her bir sonuç, her noktaya olan en kısa uzaklıktır.

#### Avantajlar:

1. Diğer algoritmalara göre uygulanması oldukça basittir çünkü lineer denklemler ve işlemler içerir.
2. Hem tek bir düğümden diğer (tüm) mevcut düğümlere olan mesafeyi ve en kısa yolu hesaplamak için hem de bir kaynak düğümden tek bir hedef düğüme en kısa hedefe ulaşıldığında durmak için kullanılabilir.
3. Yalnızca ağırlıklı ve pozitif kenarlı grafikler için çalışır.

#### Dezavantajları:

1. Yaptığı hesaplamaların işlenmesi çok zaman alır ve hareket kabiliyetini azaltır.
2. Daha önce ziyaret edilen köşeleri sürekli olarak kontrol etmesi gerekir.
3. Negatif değerlerle başa çıkılamaz.

#### Kaynaklar:

1. <https://www.geeksforgeeks.org/wp-content/uploads/Fig-11.jpg>
2. <https://www.geeksforgeeks.org/wp-content/uploads/DIJ2.jpg>
3. <https://www.geeksforgeeks.org/wp-content/uploads/DIJ3.jpg>
4. <https://www.geeksforgeeks.org/wp-content/uploads/DIJ4.jpg>
5. <https://www.geeksforgeeks.org/wp-content/uploads/DIJ5.jpg>
6. <https://www.geeksforgeeks.org/dijkstras-shortest-path-algorithm-greedy-algo-7/?ref=qcse>
7. <https://www.geeksforgeeks.org/dijkstras-shortest-path-algorithm-using-set-in-stl/?ref=qcse>
8. <https://mertmekatronik.com/dijkstra-algoritması>
9. <https://www.muhendisbeyinler.net/dijkstra-algoritması/>
10. [https://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra%27s\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra%27s_algorithm)

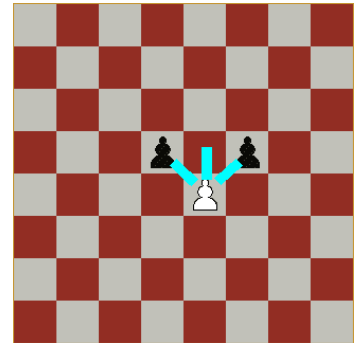
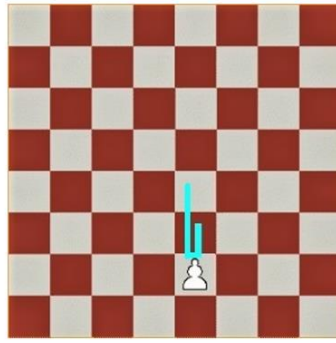
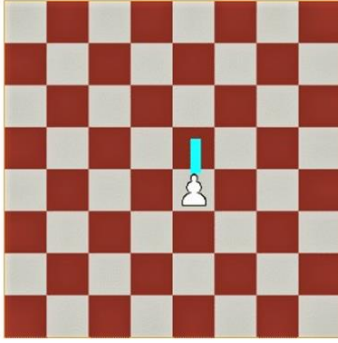
## KAÇ TANE FARKLI MUHTEMEL SATRANÇ OYUNU OLABİLİR?

### UFUK KÖPRÜLÜ (10-C)

Bu soruyu cevaplandırabilmemiz için ilk önce satranç oyununun ne olduğunu ve nasıl oynandığını bilmemiz gerekiyor. Satranç oyununun Türk Dil Kurumu Sözlüğü'ndeki tanımına baktığımızda karşımıza "iki kişi arasında altmış dört kareli bir tahta üzerinde değerleri ve adları değişik siyah ve beyaz on altışar taşla oynanan bir oyun" tanımı çıkmaktadır.

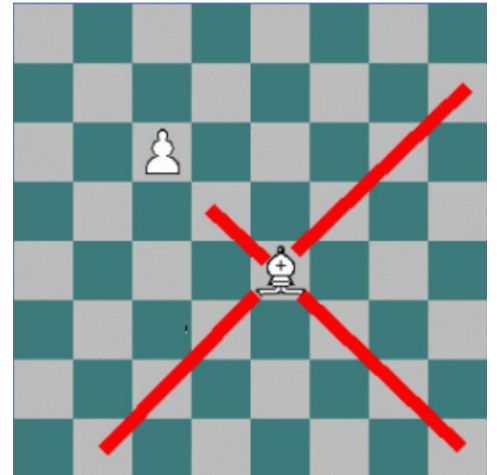
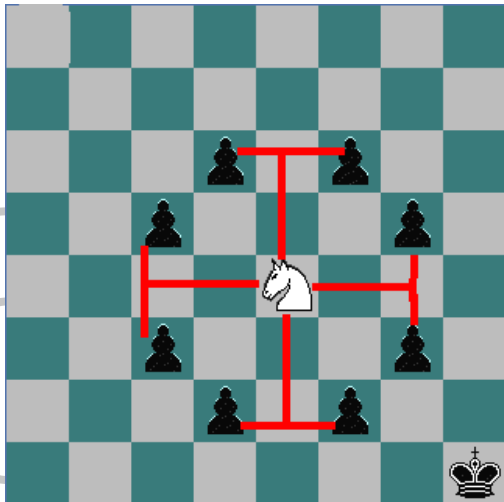
#### Piyon

Satranç oyununda piyon her zaman düz ve ileri doğru hareket eder. Piyonların bir kere ileri gittikten sonra geri dönmesi mümkün değildir. Bir piyon açılış dışında her adımda yalnızca bir kare ileri gidebilir. Açılış durumunda hiç oynamamış bir piyon ilk hamle olarak iki kare ileri oynanabilir, son karede ise at fil vezir at veya şah dönüştürülebilir, bir taşı yiyeceği zaman bir kare çapraz gider.



#### Fil

Satranç oyununda fil her zaman çapraz gider ve kesinlikle önüne çıkan başka bir taşın üzerinden atlayamaz. Filin önüne çıkan rakip taşı oyuncu fil ile yiyerek oyundan çıkarabilir.



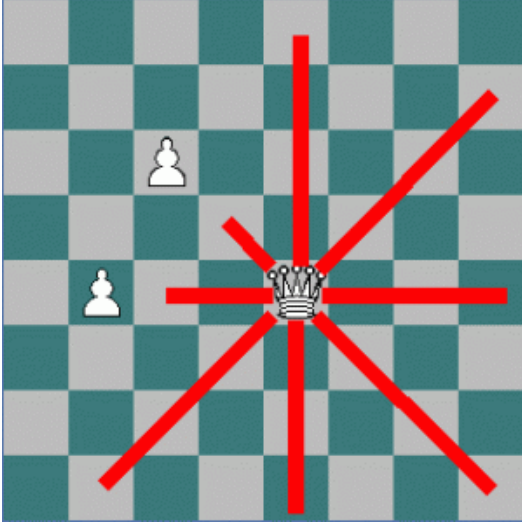
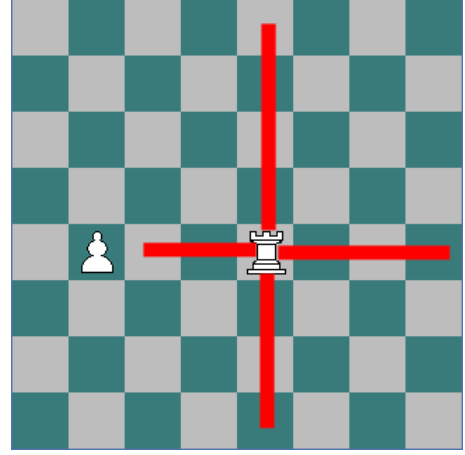
#### At

At, satranç oyununda hareketi sırasında diğer taşların üzerinden atlayabilen tek taştır. Her yöne yalnızca 'L' biçiminde hareket eder.



### Kale

Kale ileri, geri, sağa ve sola gidebilir. Kale kendi taşları veya rakip taşlarının üzerinden atlayamaz. Ancak rok denilen hamlelerde sadece şahın üzerinden atlayabilir.

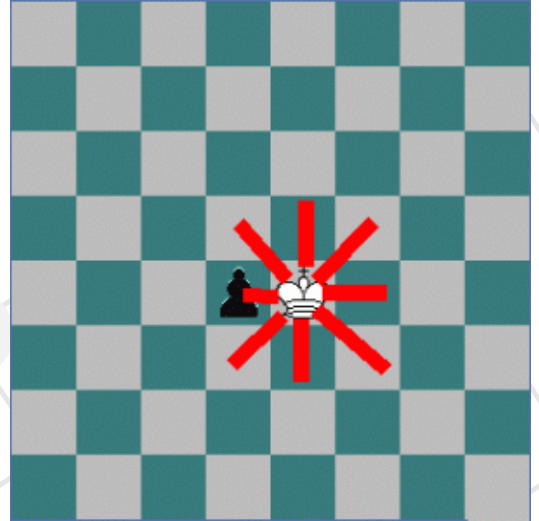


### Vezir

Satranç oyununda vezir düz, yatay ve çapraz olarak her yöne gidebilir, ancak atlayamaz. Vezirin önüne çıkan rakip taşı oyuncu veziri ile yiyerek oyundan çıkarabilir.

### Şah

Şah, bitişindeki 8 kareden herhangi birine gidebilir. İlgili karede rakip taşlardan biri varsa bu taşı alabilir. Kendi taşlarından biri varsa, ya da kare rakip taşlardan birinin tehdidi altında ise (rakip şah dahil) gidemez. Şah herhangi bir taşın üstünden atlayarak ilerleyemez. Kale ile 2-2 şeklinde kısa rok veya 3-2 şeklinde uzun rok yapabilir.



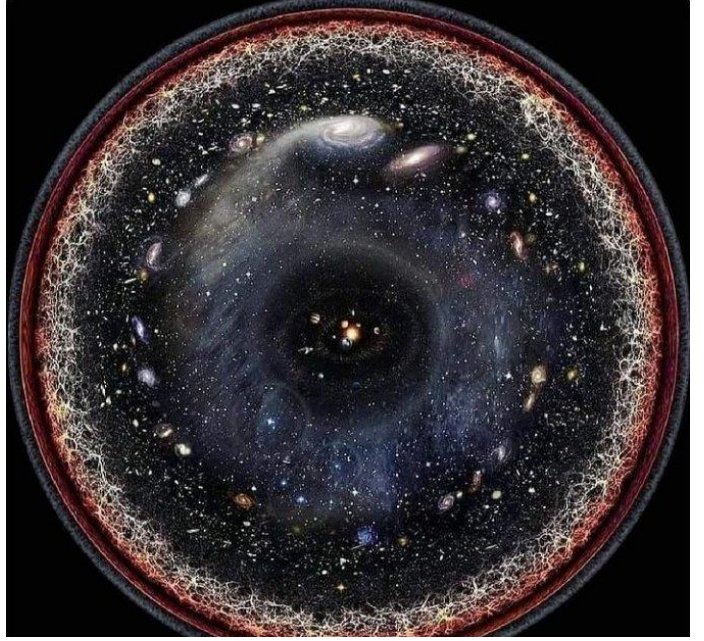
Satrançta kaç farklı oyun olabileceğiyle ilgili farklı görüşleri şu şekilde sıralayabiliriz:

### 1) Shannon Sayısı (Claude Shannon)

Shannon'a göre birbirinden farklı yaklaşık olarak  $10^{120}$  satranç oyunu bulunmaktadır. Shannon hamle başına ortalama olarak 30 farklı olasılık olduğunu düşünmüş ve bir oyunun karşılıklı olarak 80 hamle olabileceğini düşünerek

$$30^{80} \approx 10^{120}$$

önermesinde bulunmuştur. Bu sayının ne kadar büyük olduğunu gözlemlenebilir evrenimizdeki atom sayısından daha fazla olmasıyla kanıtlayabiliriz. Gözlemlenebilir evrenimizdeki atom sayısı yaklaşık olarak  $10^{80}$  iken farklı satranç oyunlarının sayısı  $10^{120}$  dir. Shannon ayrıca "mantıklı" hamlelerin oynandığı bir oyunu göz önünde bulundurarak bir tahminde bulunmuştur. Bu tahminine göre hamle başı oynanacak 30 farklı olasılık, 3 mantıklı hamleye düşürülmüş ve  $30^{80} \approx 10^{40}$  sonucuna varılmıştır.



Şekil 1: Gözlemlenebilir evren

### 2) Godfrey Hardy

Hardey'e göre satranç oyunu 80 hamleyle sınırlı kalmayıp yaklaşık 11800 hamleye kadar ulaşabilmektedir (50 hamle ve 3 kez tekrar kurallarının olduğu varsayılırsa). Bundan dolayı Hardy satrançtaki oynanabilecek toplam oyun sayısı hakkında  $10^{500}$  tahmininde bulunmuştur.

### 3) Victor Allis

Victor Allis'e göre yaklaşık olarak  $10^{50}$  farklı satranç oyunu bulunmaktadır.

Örneğin bir satranç oyunun ilk 10 karşılıklı hamlesinin hesapladığımızda karşımıza şu şekilde bir tablo çıkmaktadır.

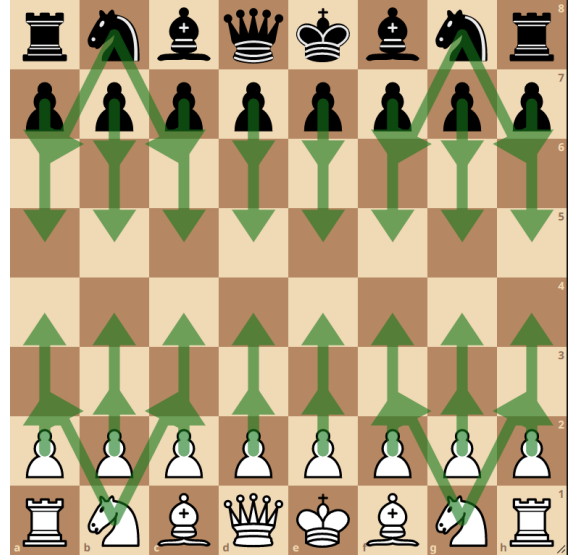
| Hamle sayısı | Muhtemel oyun sayısı |
|--------------|----------------------|
| 1            | 20                   |
| 2            | 400                  |
| 3            | 8,902                |
| 4            | 197,281              |
| 5            | 4,865,609            |
| 6            | 119,060,324          |
| 7            | 3,195,901,860        |
| 8            | 84,998,978,956       |
| 9            | 2,439,530,234,167    |
| 10           | 69,352,859,712,417   |

### Satranç oyununu çözebilir miyiz?

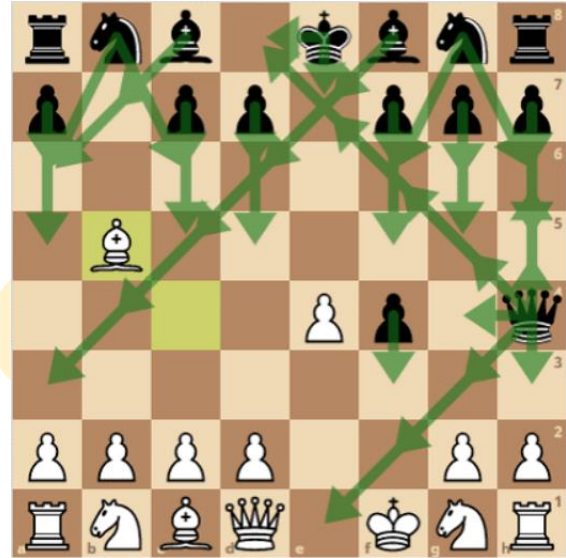
Satrancın çözülmesinin neredeyse imkânsız olduğunu söyleyebiliriz. Bunun temelinde satrancın hesaplanması muhtemelen gelecekte de mümkün olmayacak kadar olasılık barındırması yatmaktadır. Elimizdeki en gelişmiş bilgisayarların hepsini toptasak bile bu gibi bir işlem kapasitesine sahip olmadığını söyleyebiliriz.

### Kaynaklar:

- 1) [wikipedia.org](http://wikipedia.org)
- 2) [chess.com](http://chess.com)



Şekil 2: 1. Hamledeki muhtemel hamleler



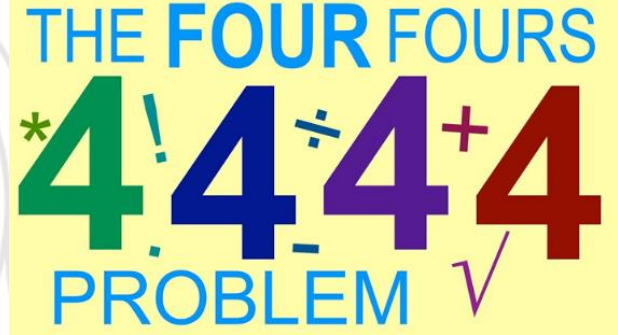
Şekil 3: 6. hamledeki muhtemel bir oyunda siyah için olası hamleler



## DÖRT ADET 4 RAKAMI KULLANARAK KAÇ TANE SAYI YAZILABİLİR?

BERKE TİĞİN KAYGIN (11-Y)

Dört adet 4 bilmececi, 4 adet 4 rakamını ve matematik işaretlerini kullanarak sonsuz tane sayı yazılabileceğini söylüyor. Peki gerçekten, dört adet 4 rakamı kullanılarak tüm sayıları elde etmek mümkün müdür? Eğer elde edilebiliyorsa nasıl elde edilir?



Öncelikle kurallardan bahsedelim: Elinizde dört tane 4 rakamı var. Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yardımıyla aritmetik işlem yapabilmemiz mümkündür. Köklü ifade ( $\sqrt{4}$  gibi), üslü ifade ( $4^4$  gibi), faktöriyel ( $4!$  gibi) ve ondalıklı sayı kullanarak ( $4.4$  gibi) da kullanabiliriz. Ondalık sayıları yazarken 0 rakamını kullanmadan  $.4$  olarak 4 sayısını kullanmamıza izin verilmektedir. Parantez kullanarak işlemlerimizi yapabiliriz. Bunlara ek olarak, 4 rakamlarını birleştirerek bir sayı oluşturabilirsiniz. Örneğin, iki tane 4 rakamını yan yana getirerek 44 sayısını işlemlerimizde kullanabiliriz. Sonuç olarak, 2 tane 4 rakamını bu sayıyı oluştururken kullanmış olduk.

Ben bu yazıda neden her sayıyı elde edebileceğimizi matematiksel olarak tabi ki de açıklayacağım ama zihin jimnastiği yapmak isterseniz 0'dan 100'e kadar olan sayıları elde etmeye çalışın. Özellikle de **67** ve **73** sayılarını bulmaya çalışın. Bu sayıları bulmak daha zorlayıcıdır. 0'dan 10'a kadar olan sayıları aşağıdaki işlemler aracılığıyla elde edebiliriz:

| İşlemin Sonucu | İşlemler                                                                                           |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0              | $44 - 44$<br>$4 + 4 - 4 - 4$<br>$\frac{4}{4} - \frac{4}{4}$<br>$\sqrt{4} - 4 \times 4$             |
| 1              | $4 - 4 + \left(\frac{4}{4}\right)$<br>$\frac{4 + 4}{4 + 4}$<br>$\left(\frac{4! - 4}{4}\right) - 4$ |



|           |                                                                                           |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>2</b>  | $\left(\frac{4}{4}\right) + \left(\frac{4}{4}\right)$ $\frac{4! - 4 * 4}{4}$              |
| <b>3</b>  | $\frac{4 + 4 + 4}{4}$                                                                     |
| <b>4</b>  | $4 * (4 - 4) + 4$ $4! - (4 * 4) - 4$                                                      |
| <b>5</b>  | $\frac{44 - 4!}{4}$ $\frac{4 * 4 + 4}{4}$                                                 |
| <b>6</b>  | $4 * .4 + 4,4$                                                                            |
| <b>7</b>  | $\frac{44}{4} - 4$ $\frac{4! + 4}{\sqrt{4} + \sqrt{4}}$ $\frac{4!}{4 + 4} + 4$            |
| <b>8</b>  | $4 + 4,4 - .4$ $\frac{4}{4} * 4 + 4$                                                      |
| <b>9</b>  | $\left(\frac{4}{4}\right) + 4 + 4$ $\left(\frac{4}{.4}\right) - \left(\frac{4}{4}\right)$ |
| <b>10</b> | $\frac{44}{4,4}$ $\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + 4$ $\sqrt{4^4} - 4 + \sqrt{4}$         |

Tablo 1: 0'dan 10'a kadar olan sayıları elde ederken kullanılan işlemler

Tabii ki, yukarıdaki tablo 1'de gördüğünüz gibi bir sayıyı birden fazla yolla elde etmek mümkündür. Peki sadece 10'a kadar olan sayılar için mi bulabiliyoruz? Cevabımız; hayır. Nobel ödüllü fizikçi Paul Dirac sayesinde, sadece logaritma kullanarak dört tane 4 kullanarak sonsuz sayıda sayı elde edeceğinden bahsetmiştir. Peki ama nasıl?

Madem logaritma kullanmamız gerekiyor, biraz logaritmadan bahsedelim. Logaritmanın tanımına göre;  $b$ , 0'a eşit olmamak üzere  $a = b^c$  ise  $\log_b a = c$  olmuş oluyor.

Örneğin,  $4 = 4^1$  olduğu için  $\log_4 4 = 1$  diyebiliriz. Bilmecede 4 sayısı üzerinde işlem yaptığımızdan ve logaritma işlemini yazmak için üslü ifadelerle ihtiyacımız olduğundan şimdi 4'ün kuvvetlerini yazalım:



$$16 = 4^2 \leftrightarrow \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$

$$64 = 4^3 \leftrightarrow \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

$$256 = 4^4 \leftrightarrow \log_4 256 = \log_4 4^4 = 4$$

Burada bir örüntü var. Yukarıdaki işlemleri incellerseniz,  $4^n = n$  olduğunu görürüz. Ne yaparsanız yapın bu denklem,  $\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \right)^n = n$  ile aynıdır. Bu işlemde n sayısı yerine istediğiniz sayıyı yazarsanız yazın, sonuç n'dir.

$$n = 1 \text{ olsun. } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$

$$n = 2 \text{ olsun. } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$$

$$n = 3 \text{ olsun. } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$$

$$n = 4 \text{ olsun. } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$$

Bilmecede 4 tane 4 kullanmamız isteniyor. Ne eksik ne de fazla! Bu yüzden,  $\frac{1}{2}$  ifadesini öyle yazacağız ki, iki tane 4 rakamını kullanmış olacağız. Burada biraz pratik düşünmekte yarar var:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{\sqrt{4}}{4}$$

Şimdi  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$  ifadesindeki  $\frac{1}{2}$  yerine  $\frac{\sqrt{4}}{4}$  yazalım:

$$\log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

Şimdi bunu 1 numaralı denklemde yerine koyalım:

$$\log_{\frac{\sqrt{4}}{4}} (\log_4 \sqrt{4}) = 1$$

Başka 4 kullanma hakkımız kalmadı ancak bizim amacımız 4 adet 4 sayısını öyle kullanarak tüm sayıları yazmaktır. Peki bunu nasıl yapabiliriz? Yani 'c' nasıl artar? Karekök

işareti ekleyerek bu sorunu kolayca çözebilirsiniz. Ne kadar çok karekök eklerseniz, sonuç karekök işareti kadar olacaktır.



Örneğin,  $\log_{\sqrt[4]{4}}(\log_4 \sqrt{\sqrt{4}}) = 2$ . ve  $\log_{\sqrt[4]{4}}(\log_4 \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}) = 3$ . Dikkat ederseniz tam olarak 2 tane karekök işareti var ve çözüldüğünde sonucun 2 olduğu görülür. Aynı şekilde 3 tane karekök işareti konulursa sonucun 3 olduğu görülecektir.

Sınırsız karekök işareti ekleyebileceğimize göre bu işlemin de sonsuz sonucu vardır diyebiliriz. Elinize kâğıt ve kalem alıp çözmeyi deneyebilirsiniz. İşte bu bilmecenin ispatı da budur. Gördüğünüz üzere logaritma ve karekök bilgilerimizi kullanarak sonsuz adet sayı yazılabileceğini kanıtladık. Çok ilginç değil mi?

#### **Görsel Kaynaklar:**

1. <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/teacherguide/5a7530249c4696417a69b288>
2. <https://www.gleammath.com/post/the-four-fours>

#### **Kaynaklar:**

1. <https://www.matematiksel.org/4-tane-4-ile-istediginiz-her-sayiyi-yazabilirsiniz/>
2. [https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/funny/4\\_4.shtml](https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/funny/4_4.shtml)
3. <https://www.sihirlifasulyeler.com/bilim/logaritma-nedir-ne-ise-yarar-gercek-hayatta-nerelerde-kullanilir>



## EYLEMSİZLİK MOMENTİ

ARDA MERT DEMİR (10-D)

Bu yazımda eylemsizlik momentinden bahsedeceğim, formülünü anlatıp örnekler vereceğim. Öncelikle, eylemsizliği Newton'un birinci yasası olarak tanıdığımız tanım aracılığı ile anlayalım. Newton der ki; "Eğer bir cismin üzerine etki eden net/toplam kuvvet sıfır ise, durmakta olan bir cisim durmayı, hareket etmekte olan bir cisim ise aynı yönde ve hızda hareket etmeyi sürdürür." Bir diğer deyişle, eylemsizlik cisimlerin o an bulundukları hareket durumunu korumaya yönelik olan eğilimleridir. Peki eylemsizlik momentini nedir?

Eylemsizlik momentini tüm döndürülebilen cisimlerde görülür. Bir nesnenin döndürme eksenini belli olması şartıyla o nesnenin açısal hızının değiştirilmesinin zorluğunu anlatan skaler bir büyüklüktür. Eylemsizlik momentinin dönme mekaniğindeki mantığı kütlenin doğrusal mekanikteki rolüyle benzetilmektedir. Eylemsizlik momentini 2 değişkene bağlıdır:

- Cismin kütlesi (Birincil olarak)
- Kütlenin dönme eksenine göre dağılımı

Bir nesnenin kütlesi, dönme ekseninden ne kadar uzaktaysa açısal hızında değişiklik yapmak da o kadar zorlaşır. Eylemsizlik momentini " $I$ " işareti ile ifade edilir. Kendi eksenini etrafında dönen ve " $r$ " yarıçapına sahip olan bir nesnenin eylemsizlik momentini  $I = mr^2$  formülü hesaplanır. Eylemsizlik momentinin SI birimleri  $kg \times m^2$  'dir.

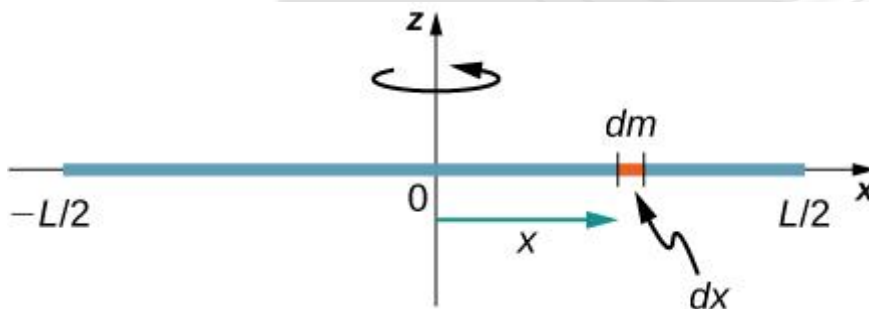
Eylemsizlik momentinin bir diğer adı da atalet momentidir. Aynı zamanda moment kolunun uzunluğunun karesine bağlı olduğundan kütlenin ikinci momentini de denilmektedir.

### EYLEMSİZLİK MOMENTİ NASIL HESAPLANABİLİR?

Mekanik sistemler genel olarak farklı kütlelere ve şekillere sahip birçok nesneden oluşur. Herhangi bir şekle sahip nesnenin herhangi bir dönme eksenini için eylemsizlik momentini, bütün kütlelerinin eylemsizlik momentini toplayarak hesaplayabiliriz. Bu toplam eylemsizliği integral yöntemini kullanarak da hesaplayabiliriz.

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Bu formül, karmaşık cisimlerdeki eylemsizlik momentini hesaplamak için kullanılan genel formüldür.



Kütlesi  $m$  ve uzunluğu  $L$  olan homojen ince bir çubuk hayal edelim. Çubuğun ince olması, kesit alanının ihmal edilebilir olmasını sağladığından hesaplama işlemimiz kolaylaşır. Bu çubuğun  $z$  ekseninde  $x$  eksenine paralel olacak şekilde döndürüleceğini düşünelim. Bu cismin eylemsizlik momentini integral ile elde edebiliriz.

Bu homojen çubuğu oluşturan küçük kütle elemanına “ $dm$ ” diyelim. İntegrasyonu sadece uzay üzerinden yapabileceğimiz için lineer kütle yoğunluğunu yani  $\lambda$ 'yı kullanmamız gerekir.

$$\lambda = \frac{\text{kütle}(m)}{\text{uzunluk}(l)} \text{ olduğundan } m = \lambda \cdot l \text{ de yazılabilir.}$$

İki tarafın da türevini aldığımızda;  $\lambda$  sabit olduğundan

$$dm = d(\lambda l) = \lambda(dl) \text{ buluruz.}$$

Bu formül tek bir noktadaki eylemsizliği verdiği için integral bütün çubuktaki atalet momentini hesaplamamıza yardımcı olur.

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx.$$

Son adımımız integralin alt ve üst sınırını belirlemek olacak. Çubuk  $-\frac{L}{2}$  ve  $\frac{L}{2}$  den uzandığından, integralimizin alt ve üst sınırlarını bunlar oluşturacaktır. Tam ortasından çevirdiğimizden dolayı değerler  $-\frac{L}{2}$  ve  $\frac{L}{2}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \lambda \left( \frac{1}{3} \right) \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \left( -\frac{L}{2} \right)^3 \right] \\ &= \lambda \left( \frac{1}{3} \right) \frac{L^3}{8} (2) = \frac{M}{L} \left( \frac{1}{3} \right) \frac{L^3}{8} (2) = \frac{1}{12} ML^2. \end{aligned}$$

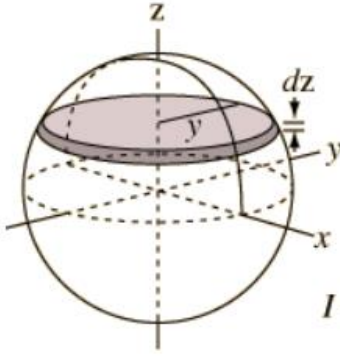
Son olarak, sonuçları aynı çubuğun farklı bir eksendeki eylemsizlik momentiyle karşılaştıracamız.

## EYLEMSİZLİĞİN GÜNLÜK YAŞANTIDAN ÖRNEKLERİ

Eylemsizliği genellikle volan, kol saati, vites kutusu gibi günlük hayatta duyduğumuz, çark gibi birden fazla parçaya sahip olan mekanik sistemlerde görürüz. Aynı zamanda teorik amaçlı olarak da eylemsizliği kullanabiliyoruz. Genellikle, bilinen ve daha önceden ispatı yapılmış cisimlerdeki eylemsizlik denklemini kaynaklardan hazır olarak elde edebiliriz fakat düzensiz ve şekli belli olmayan cisimlerde eylemsizliği bulmak için integral kullanırız.

Örneğin, denklemi kanıtlamak için düzensiz olan bir cismi ele alalım.





$$dI = \frac{1}{2} y^2 dm = \frac{1}{2} y^2 \rho dV = \frac{1}{2} y^2 \rho \pi y^2 dz$$

and the integral becomes

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R y^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \rho \pi R^5$$

Radius =  $R$

Mass =  $M$

$$\text{Density} = \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

Substituting the density expression gives

$$I = \frac{8}{15} \left[ \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \right] \pi R^5 = \frac{2}{5} MR^2$$

Üstte açıkladığımız gibi burada da değerleri belirleyip integral metoduyla bir denklem kuruyoruz ve bu metodu uygulayarak bu cismin denklemini elde ediyoruz, kanıtlamış oluyoruz.

Kısaca, eylemsizlik dönen bir cismin var olan açısını değiştirirken karşılaştığımız zorluğa denir. Eylemsizlik en basit mekanik cisimlerden araba, bisiklet gibi karmaşık araçlara kadar her yerde ve her alanda gözlemlenebilir. Çoğu çark, motor, dişli gibi materyal belirli ölçülerde ve büyüklüklerde üretildiğinden çoğunun formülü çoktan hesaplanmıştır ve kaynaklar sayesinde bu formüllere ulaşabiliriz fakat belli olmayan kendine has (düzensiz) cisimlerin denklemi için integral yöntemini kullanırız.

#### Kaynaklar:

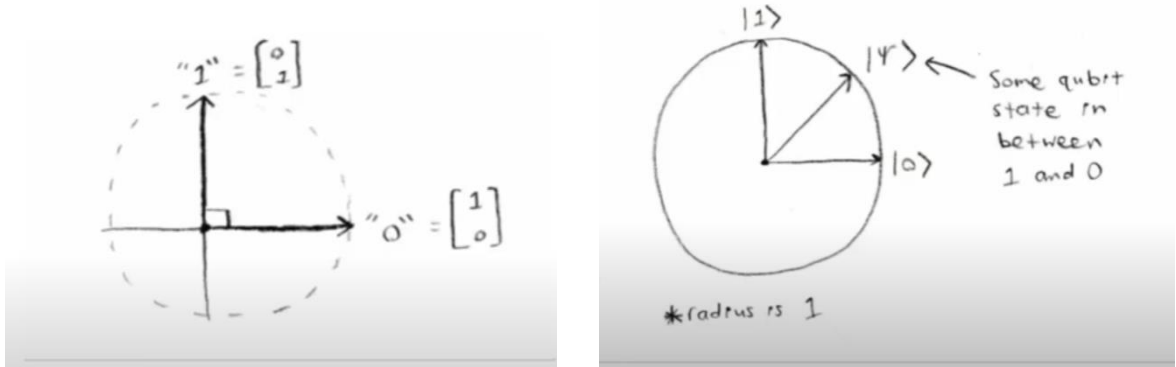
1. [10.5 Calculating Moments of Inertia – University Physics Volume 1 \(ucf.edu\)](https://www.khanacademy.org/science/physics/torque-angular-momentum/torque-tutorial/a/rotational-inertia)
2. <https://evrimagaci.org/atalet-eylemsizlik-nedir-cisimlerin-dogasiyla-ve-sagduyularimizla-ilgili-bize-neler-soyler-3076>
3. <https://tr.khanacademy.org/science/physics/torque-angular-momentum/torque-tutorial/a/rotational-inertia>
4. <https://www.toppr.com/ask/content/concept/moment-of-inertia-208685/>
5. [https://youtu.be/lc\\_wFYu8xVs](https://youtu.be/lc_wFYu8xVs)



## ERDEM TELLİOĞLU (10-D)

Bir klasik bilgisayar işlemleri temsil etmek için bitleri kullanır ve bu işlemleri bir ve sıfırları kullanarak kodlar. Ancak kuantum bilgisayarlarında, bitler yerine kubitler veya kuantum bitleri vardır. Kuantum bitlerinin en önemli özelliği, "süperpozisyon" adı verilen belirli bir durumda olabilmeleridir. Böylece kuantum bilgisayarları aynı anda hem birleri hem sıfırları temsil edebilir. Bu yönüyle, kubitlerin sürekli yani "continuous", ve bitlerin de "discrete" yani ayırık veriler olduğunu söyleyebiliriz. Kuantum mekaniğinin bu özelliği, kuantum bilgisayarlardaki kubitlerin aynı anda dört senaryoyu temsil etmesine yardımcı olur. Klasik bilgisayarların farklı durumları sırayla analiz etmesi işlemlere çok daha fazla zaman harcanmasına neden olur. Kuantum bilgisayarlar, karmaşık işlemler için gereken süreyi önemli ölçüde azaltır. Örneğin; Google, laboratuvarındaki herhangi bir klasik bilgisayardan 100 milyon daha hızlı bir kuantum bilgisayarı olduğunu açıklamıştır.

Solda bitlerin "discrete" yani ayırık olan yapısını sağda ise kubitlerin "continuous" yapısını görebilirsiniz.

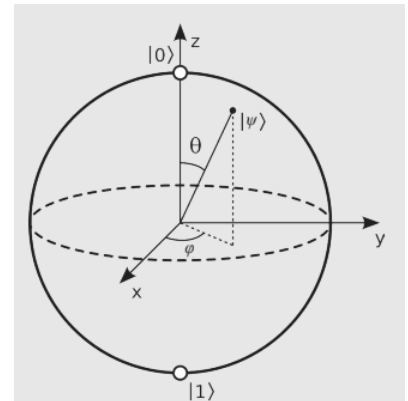


Kubitlerde depolanan verileri ve işlemleri temsil etmek için Bloch Sphere adlı bir şekil ile temsil edilen vektörleri kullanırız ve onları temsil etmek için de matrisleri kullanırız. Vektörler, bra-ket notasyonu veya ket-bra notasyonu olmak üzere iki farklı biçimde not edilir. Kuantumda bra " $|$ " sembolü ile ve ket ">" sembolü ile gösterilir. İşte bir ket-bra notasyonu örneği:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Ve bir bra-ket notasyonu örneği:

$$\langle\psi| = [a \ b]$$



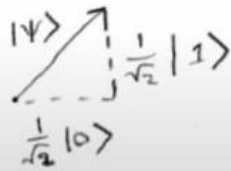
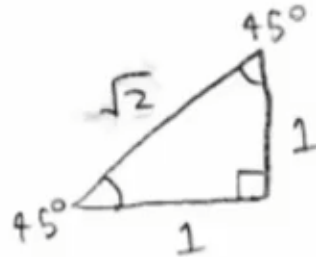
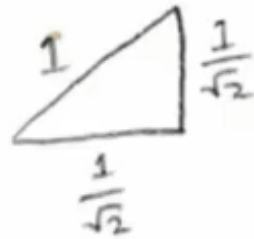
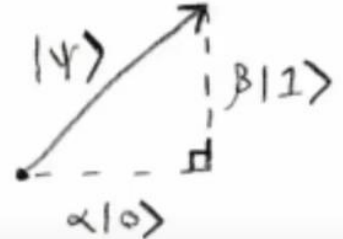
Yukarıdaki bilgileri kullanarak “1” vektörü ve “0” vektörünü aşağıda gösterildiği gibi temsil edebiliriz:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu nedenle, herhangi bir kubit durumunu bu iki temel durumun katsayılarının toplamıyla temsil edebiliriz:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

Ayrıca daha önce de belirttiğimiz gibi vektörlerin bir küre içinde olması gerektiğini de eklemeliyiz çünkü onları kullanma amacımız olasılıkları hesaplamaktır ve bu  $x$  ve  $y$  bileşenlerinin karesinin 1'e eşit olduğu kürede yapılabilir. Örneğin, “0” ile “1” arasında bir kubit durumunu temsil etmek istiyorsak, bunu aşağıda gösterildiği gibi ifade edebiliriz:



$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\left| \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Aşağıda olasılığa ulaşmak için temel faktörlerin katsayılarının karelerini kullandığımız denklemi görebilirsiniz:

$$P(|\psi\rangle = |0\rangle) = |\alpha|^2$$

$$P(|\psi\rangle = |1\rangle) = |\beta|^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ (birim çember olduğu için)}$$



Kuantum hesaplamada, kubitler üzerinde işlem yapmak için kapıları matris biçiminde kullanırız. Kapılar matris biçiminde olduğundan, çıktıyı gözlemlemek için kubitlerimizi bu matrislerle çarpıyoruz. Örneğin, aşağıda en temel kapı olan “identity” kapısını görebilirsiniz:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}: I |0\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

Ve diğer bazı karmaşık kuantum kapıları:

| Gate name       | # Qubits | Circuit Symbol | Unitary Matrix                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Description                                                                                                                                                                             |
|-----------------|----------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hadamard        | 1        |                | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                   | Transforms a basis state into an even superposition of the two basis states.                                                                                                            |
| T               | 1        |                | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                              | Adds a relative phase shift of $\pi/4$ between contributing basis states. Sometimes called a $\pi/8$ gate, because diagonal elements can be written as $e^{-i\pi/8}$ and $e^{i\pi/8}$ . |
| CNOT            | 2        |                | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                     | Controlled-not; reversible analogue to classical XOR gate. The input connected to the solid dot is passed through to make the operation reversible.                                     |
| Toffoli (CCNOT) | 3        |                | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ | Controlled-controlled-not; a three-qubit gate that switches the third bit for states where the first two bits are 1 (that is, switches $ 110\rangle$ to $ 111\rangle$ and vice versa).  |
| Pauli-Z         | 1        |                | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                      | Adds a relative phase shift of $\pi$ between contributing basis states. Maps $ 0\rangle$ to itself and $ 1\rangle$ to $- 1\rangle$ . Sometimes called a “phase flip.”                   |
| Z-Rotation      | 1        |                | $\begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                              | Adds a relative phase shift of (or rotates state vector about z-axis by) $\theta$ .                                                                                                     |
| NOT             | 1        |                | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                       | Analogous to classical NOT gate; switches $ 0\rangle$ to $ 1\rangle$ and vice versa.                                                                                                    |

Örneğin; Hadamard (H) geçidini ele alalım:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

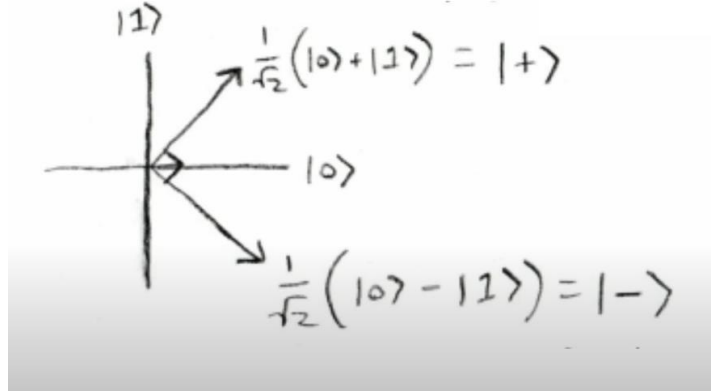
Hadamard kapısına “0” veya “1” koyduğunuzda, kapı aynı zamanda önceki değerini de kodlarken aynı zamanda tam olarak “1” ve “0” arasında bir durum verir. Aşağıda, Hadamard geçidini en temel “0” ve “1” kubit değerlerine uyguladığımızdaki çıktıyı görebilirsiniz:



$$H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$$

$$H |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$$

“0” için kodlama yaparken “|+>”, “1” için kodlama yaparken “|->” kullanırız. Burada bu ifadenin görsel bir açıklamasını görebilirsiniz:



Bu örneklerin yardımıyla, bir  $n$  –giriş mantık işleminin veya “kapının” matematiksel olarak  $n$  giriş kübüti üzerinde çalışan ve  $n$  çıkış kübüti üreten  $2^n \times 2^n$  olarak tanımlanabileceğini söyleyebiliriz. Örneğin; Hadamard kapısına ya “1” ya “0” değerlerini uygulayabiliriz. Bu da sadece bir adet girdimizin olabileceğini gösterir. Dolayısıyla, Hadamard kapısı için kullanılan matris  $2^1 \times 2^1$  lik bir matristir.

Kuantum hesaplama (Quantum Computing), üzerinde çalışmak için en zorlu bilim alanlarından biridir. "Atom altı parçacıkların hareketi ve etkileşiminin matematiksel tanımıyla ilgilenen bir mekanik alt dalı" olan Kuantum mekaniğine dayandığından, atom altı parçacıkların örneğin; "entanglement (dolaşıklık)" gibi başka özelliklerinin de kullanılmasını sağlar (CNOT kapısında). Atom altı parçacıkların bu karmaşık özellikleri, tonlarca bilim alanının üzerinde çalışmasını gerektirir. Matematik, Kuantum Hesaplama vektörler, matrisler vb. gibi zor hesaplamalar ve semboller ile bilim adamlarına yardımcı olmasına rağmen en önemli olanlardan biridir.

#### Kuantum Hesaplama hakkında bazı ilginç bilgiler:

- Kuantum bilgisayarlar “**Quantum tunnelling**” (kuantum tünelleme) adlı bir özellikleri sayesinde, daha fazla elektrik kullanmak yerine, güç tüketimini 100 ila 1000 kat arasında azaltacaktır.
- Her gün 2,5 exabyte veri üretmekteyiz. Bu sayı, 5 milyon dizüstü bilgisayardaki içeriğe eşdeğer. Kuantum bilgisayarlar, ürettiğimiz yüksek sayılardaki veri miktarını işleyebilmektedir.



Ve en önemlisi:

Klasik bilgisayarlar bazı görevlerde kuantum bilgisayarlardan (Örneğin; e-posta) daha iyidir. Kuantum bilgisayarların amacı, klasik bilgisayarların yerini almak değil, farklı sorunları çözmek için farklı bir araç olmaktır.

**Kaynaklar:**

1. *"Quantum Computing: Progress and Prospects (2019)" by THE NATIONAL ACADEMIES PRESS*
2. <https://bernardmarr.com/15-things-everyone-should-know-about-quantum-computing/>
3. <https://www.investopedia.com/terms/q/quantum-computing.asp#:~:text=Quantum%20computing%20is%20the%20study,of%20both%20%20and%201.>
4. [https://www.power-and-beyond.com/quantum-computers-how-do-they-work-and-what-might-we-expect-of-them-a-940315/?cmp=qo-ta-art-trf-PuB\\_DSA-20210801&qclid=Cj0KCQjw-JyUBhCuARIsANUqQ\\_K3zmbK6JxakmxsKt8HBksLB3vOpUYzGons0GRs45vz69hidNi75SQaAt6UEALw\\_wcB](https://www.power-and-beyond.com/quantum-computers-how-do-they-work-and-what-might-we-expect-of-them-a-940315/?cmp=qo-ta-art-trf-PuB_DSA-20210801&qclid=Cj0KCQjw-JyUBhCuARIsANUqQ_K3zmbK6JxakmxsKt8HBksLB3vOpUYzGons0GRs45vz69hidNi75SQaAt6UEALw_wcB)
5. <https://www.youtube.com/watch?v=ywKFLYDF7Ns&t=1102s>



**TAN GÜRLER (10-P)**

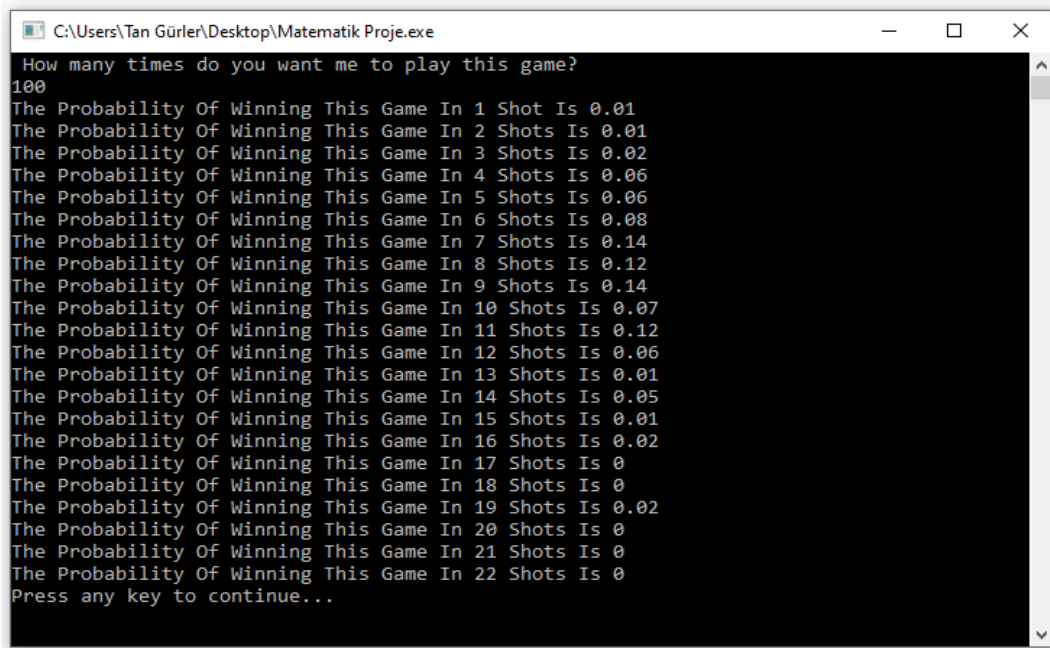
Olasılık kavramı hakkında daha iyi fikir sahibi olabilmek için, bir sayı tahmin oyunundaki kazanma olasılığını gösteren, MICROSOFT SMALL BASIC dilinde bir bilgisayar programı yazdım. Program 1 ile 100 arasında (1 ve 100 dahil) rastgele bir tam sayı ("gizli sayı" olarak adlandırılır) üretir ve yine bu program bu gizli sayıyı rastgele atışlarla tahmin etmeye çalışır. Her atışta program, olası tam sayıların aralığını gizli sayıyı bulana kadar daraltır ve gizli sayının bulunduğu başarılı atışın kaçınıcı atış olduğunun sayısını (numarasını) tutar. Olası aralığın ortasına en yakın tam sayıyı girmek, başarılı atışın numarasını azaltabilir, ancak programı olası aralık içinde rastgele seçilen bir tam sayıyı girecek şekilde tasarladım. Deneyimlerimle, her oyunda maksimum atış sayısını 22 ile sınırladım.

Başlangıçta program size oyunu kaç kez oynamak istediğinizi sorar, ardından oyunu girdiğiniz sayı kadar çalıştırır ve her oyunda gizli sayının kaçınıcı atışta başarılı olarak bulunduğu tutar. Sonunda program, her atış için kazanma (gizli sayıyı bulma) olasılığının ne kadar olduğunu raporlar.

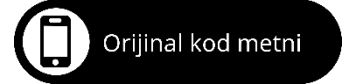
MICROSOFT SMALL BASIC dilinde yazdığım bilgisayar kodunun orijinaline ulaşmak için yandaki QR kodunu kullanabilirsiniz.

Arka arkaya programı 100, 1.000, 10.000, 100.000 ve 1.000.000 kez oynayacak şekilde çalıştırdım ve program her atış için oyunu kazanma olasılığının ne olduğunu raporladı (Şekil 1-5).

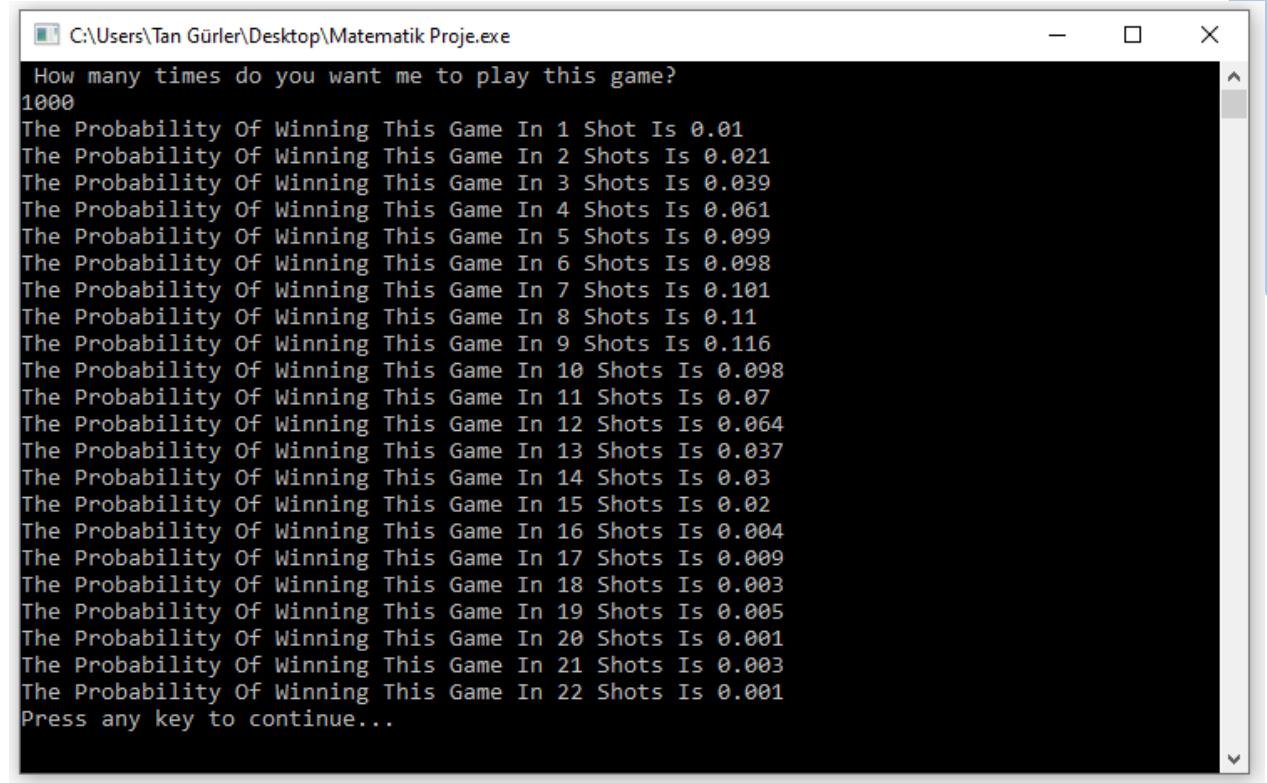
Şekil 1 - 100 oyun için raporlama ekranı:



```
C:\Users\tan.gurler\Desktop\Matematik Proje.exe
How many times do you want me to play this game?
100
The Probability Of Winning This Game In 1 Shot Is 0.01
The Probability Of Winning This Game In 2 Shots Is 0.01
The Probability Of Winning This Game In 3 Shots Is 0.02
The Probability Of Winning This Game In 4 Shots Is 0.06
The Probability Of Winning This Game In 5 Shots Is 0.06
The Probability Of Winning This Game In 6 Shots Is 0.08
The Probability Of Winning This Game In 7 Shots Is 0.14
The Probability Of Winning This Game In 8 Shots Is 0.12
The Probability Of Winning This Game In 9 Shots Is 0.14
The Probability Of Winning This Game In 10 Shots Is 0.07
The Probability Of Winning This Game In 11 Shots Is 0.12
The Probability Of Winning This Game In 12 Shots Is 0.06
The Probability Of Winning This Game In 13 Shots Is 0.01
The Probability Of Winning This Game In 14 Shots Is 0.05
The Probability Of Winning This Game In 15 Shots Is 0.01
The Probability Of Winning This Game In 16 Shots Is 0.02
The Probability Of Winning This Game In 17 Shots Is 0
The Probability Of Winning This Game In 18 Shots Is 0
The Probability Of Winning This Game In 19 Shots Is 0.02
The Probability Of Winning This Game In 20 Shots Is 0
The Probability Of Winning This Game In 21 Shots Is 0
The Probability Of Winning This Game In 22 Shots Is 0
Press any key to continue...
```

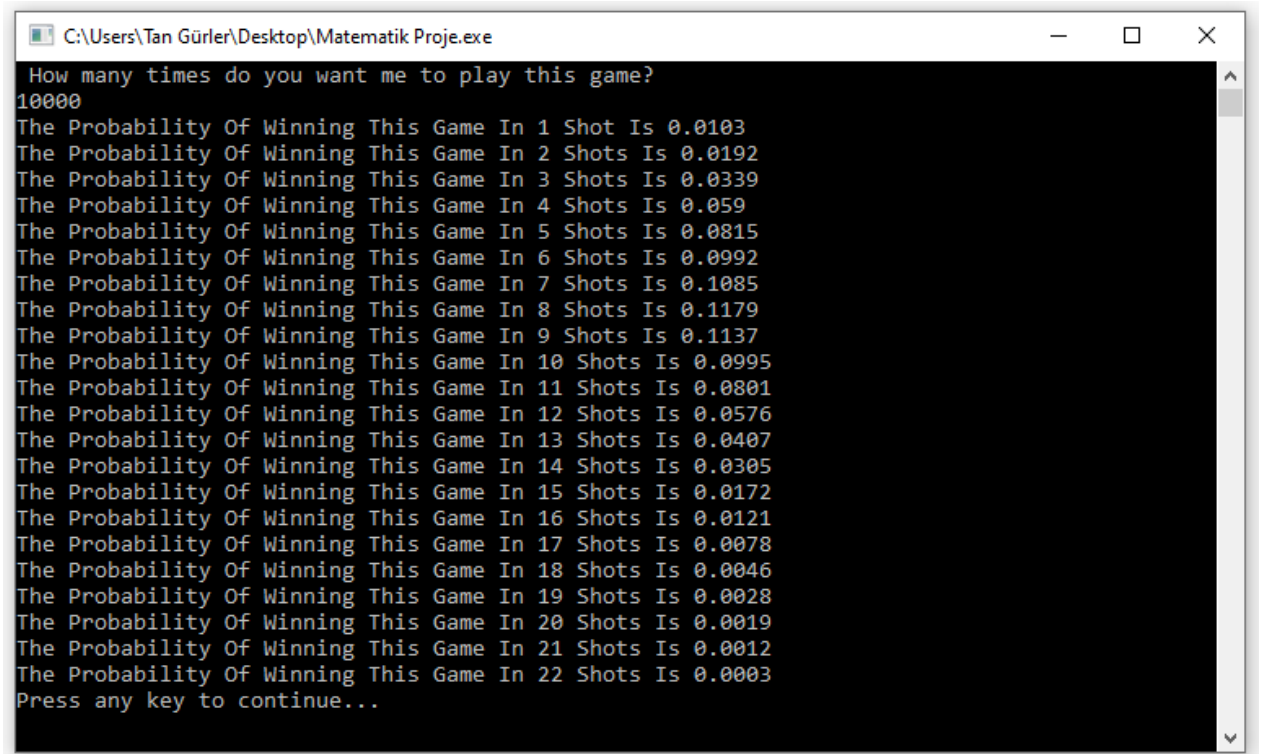


Şekil 2 - 1.000 oyun için raporlama ekranı:



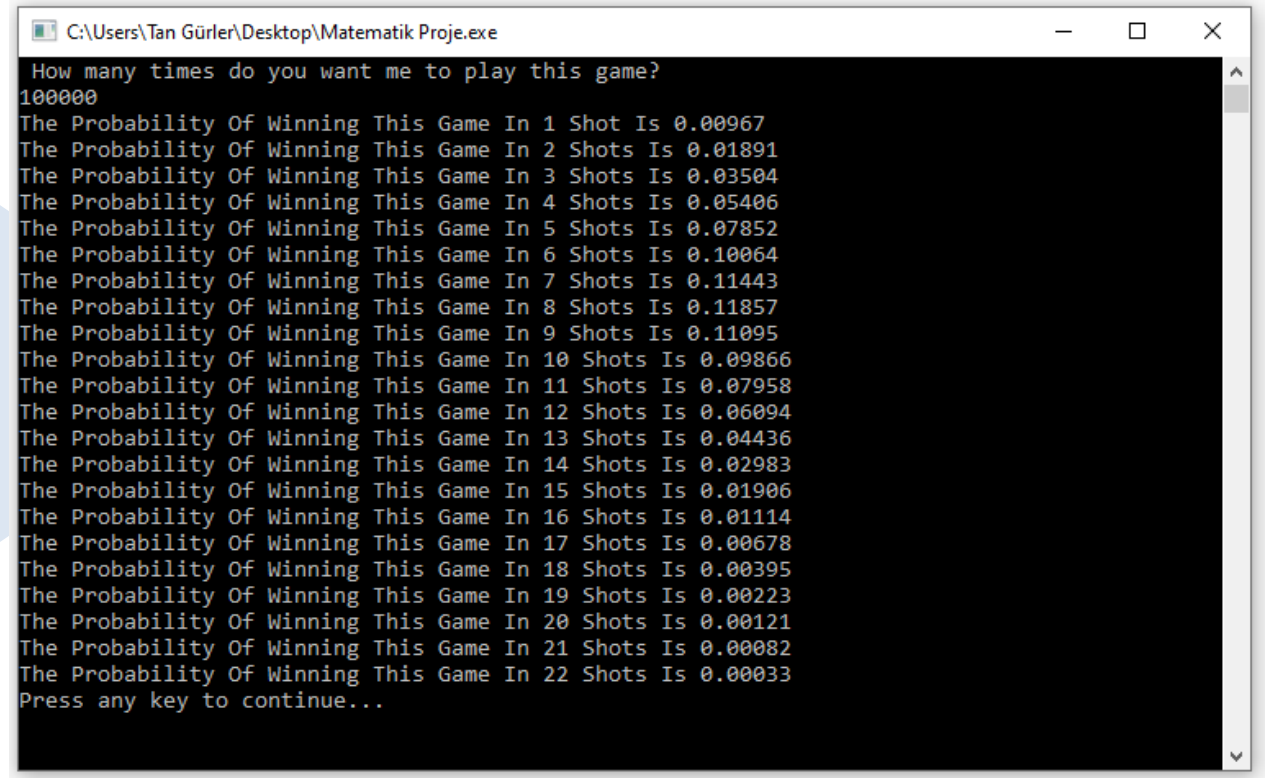
```
C:\Users\tan Güler\Desktop\Matematik Proje.exe
How many times do you want me to play this game?
1000
The Probability Of Winning This Game In 1 Shot Is 0.01
The Probability Of Winning This Game In 2 Shots Is 0.021
The Probability Of Winning This Game In 3 Shots Is 0.039
The Probability Of Winning This Game In 4 Shots Is 0.061
The Probability Of Winning This Game In 5 Shots Is 0.099
The Probability Of Winning This Game In 6 Shots Is 0.098
The Probability Of Winning This Game In 7 Shots Is 0.101
The Probability Of Winning This Game In 8 Shots Is 0.11
The Probability Of Winning This Game In 9 Shots Is 0.116
The Probability Of Winning This Game In 10 Shots Is 0.098
The Probability Of Winning This Game In 11 Shots Is 0.07
The Probability Of Winning This Game In 12 Shots Is 0.064
The Probability Of Winning This Game In 13 Shots Is 0.037
The Probability Of Winning This Game In 14 Shots Is 0.03
The Probability Of Winning This Game In 15 Shots Is 0.02
The Probability Of Winning This Game In 16 Shots Is 0.004
The Probability Of Winning This Game In 17 Shots Is 0.009
The Probability Of Winning This Game In 18 Shots Is 0.003
The Probability Of Winning This Game In 19 Shots Is 0.005
The Probability Of Winning This Game In 20 Shots Is 0.001
The Probability Of Winning This Game In 21 Shots Is 0.003
The Probability Of Winning This Game In 22 Shots Is 0.001
Press any key to continue...
```

Şekil 3 : 10.000 oyun için raporlama ekranı:



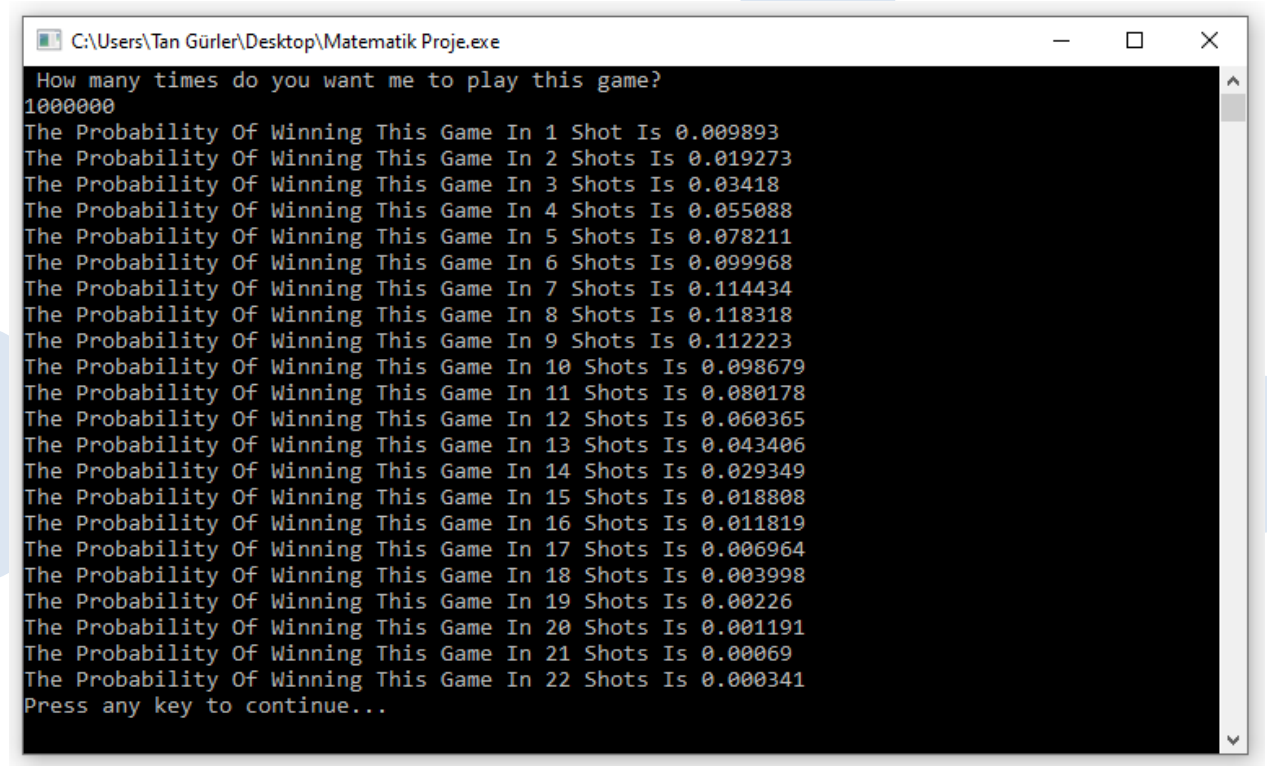
```
C:\Users\tan Güler\Desktop\Matematik Proje.exe
How many times do you want me to play this game?
10000
The Probability Of Winning This Game In 1 Shot Is 0.0103
The Probability Of Winning This Game In 2 Shots Is 0.0192
The Probability Of Winning This Game In 3 Shots Is 0.0339
The Probability Of Winning This Game In 4 Shots Is 0.059
The Probability Of Winning This Game In 5 Shots Is 0.0815
The Probability Of Winning This Game In 6 Shots Is 0.0992
The Probability Of Winning This Game In 7 Shots Is 0.1085
The Probability Of Winning This Game In 8 Shots Is 0.1179
The Probability Of Winning This Game In 9 Shots Is 0.1137
The Probability Of Winning This Game In 10 Shots Is 0.0995
The Probability Of Winning This Game In 11 Shots Is 0.0801
The Probability Of Winning This Game In 12 Shots Is 0.0576
The Probability Of Winning This Game In 13 Shots Is 0.0407
The Probability Of Winning This Game In 14 Shots Is 0.0305
The Probability Of Winning This Game In 15 Shots Is 0.0172
The Probability Of Winning This Game In 16 Shots Is 0.0121
The Probability Of Winning This Game In 17 Shots Is 0.0078
The Probability Of Winning This Game In 18 Shots Is 0.0046
The Probability Of Winning This Game In 19 Shots Is 0.0028
The Probability Of Winning This Game In 20 Shots Is 0.0019
The Probability Of Winning This Game In 21 Shots Is 0.0012
The Probability Of Winning This Game In 22 Shots Is 0.0003
Press any key to continue...
```

Şekil 4 – 100.000 oyun için raporlama ekranı:



```
C:\Users\tan Gürler\Desktop\Matematik Proje.exe
How many times do you want me to play this game?
100000
The Probability Of Winning This Game In 1 Shot Is 0.00967
The Probability Of Winning This Game In 2 Shots Is 0.01891
The Probability Of Winning This Game In 3 Shots Is 0.03504
The Probability Of Winning This Game In 4 Shots Is 0.05406
The Probability Of Winning This Game In 5 Shots Is 0.07852
The Probability Of Winning This Game In 6 Shots Is 0.10064
The Probability Of Winning This Game In 7 Shots Is 0.11443
The Probability Of Winning This Game In 8 Shots Is 0.11857
The Probability Of Winning This Game In 9 Shots Is 0.11095
The Probability Of Winning This Game In 10 Shots Is 0.09866
The Probability Of Winning This Game In 11 Shots Is 0.07958
The Probability Of Winning This Game In 12 Shots Is 0.06094
The Probability Of Winning This Game In 13 Shots Is 0.04436
The Probability Of Winning This Game In 14 Shots Is 0.02983
The Probability Of Winning This Game In 15 Shots Is 0.01906
The Probability Of Winning This Game In 16 Shots Is 0.01114
The Probability Of Winning This Game In 17 Shots Is 0.00678
The Probability Of Winning This Game In 18 Shots Is 0.00395
The Probability Of Winning This Game In 19 Shots Is 0.00223
The Probability Of Winning This Game In 20 Shots Is 0.00121
The Probability Of Winning This Game In 21 Shots Is 0.00082
The Probability Of Winning This Game In 22 Shots Is 0.00033
Press any key to continue...
```

Şekil 5 – 1.000.000 oyun için raporlama ekranı:



```
C:\Users\tan Gürler\Desktop\Matematik Proje.exe
How many times do you want me to play this game?
1000000
The Probability Of Winning This Game In 1 Shot Is 0.009893
The Probability Of Winning This Game In 2 Shots Is 0.019273
The Probability Of Winning This Game In 3 Shots Is 0.03418
The Probability Of Winning This Game In 4 Shots Is 0.055088
The Probability Of Winning This Game In 5 Shots Is 0.078211
The Probability Of Winning This Game In 6 Shots Is 0.099968
The Probability Of Winning This Game In 7 Shots Is 0.114434
The Probability Of Winning This Game In 8 Shots Is 0.118318
The Probability Of Winning This Game In 9 Shots Is 0.112223
The Probability Of Winning This Game In 10 Shots Is 0.098679
The Probability Of Winning This Game In 11 Shots Is 0.080178
The Probability Of Winning This Game In 12 Shots Is 0.060365
The Probability Of Winning This Game In 13 Shots Is 0.043406
The Probability Of Winning This Game In 14 Shots Is 0.029349
The Probability Of Winning This Game In 15 Shots Is 0.018808
The Probability Of Winning This Game In 16 Shots Is 0.011819
The Probability Of Winning This Game In 17 Shots Is 0.006964
The Probability Of Winning This Game In 18 Shots Is 0.003998
The Probability Of Winning This Game In 19 Shots Is 0.00226
The Probability Of Winning This Game In 20 Shots Is 0.001191
The Probability Of Winning This Game In 21 Shots Is 0.00069
The Probability Of Winning This Game In 22 Shots Is 0.000341
Press any key to continue...
```

Tablo 1, artan oyun sayısı ile bu oyunu hangi atışta kazanma (gizli sayıyı bulma) olasılığının nasıl değiştiğini göstermektedir.

**Tablo 1:**

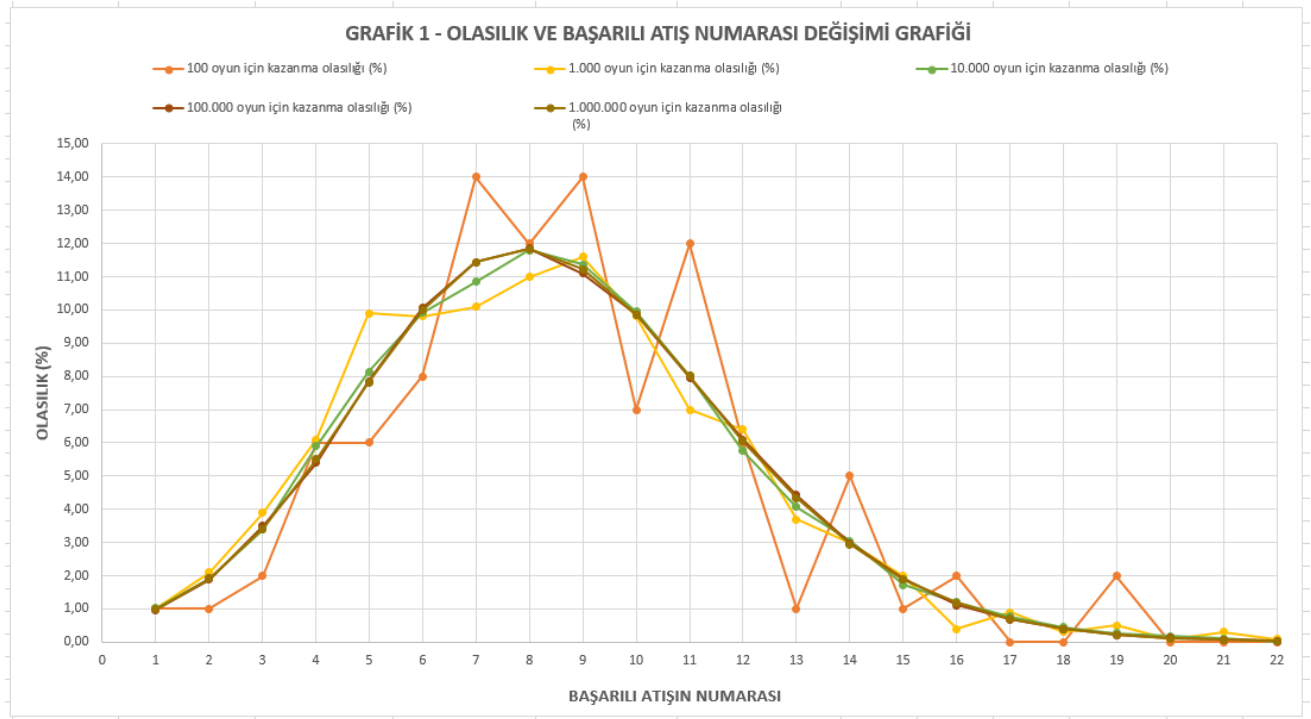
| Başarılı atışın<br>kaçıncı atışta<br>olduğu | 100 oyun için<br>kazanma olasılığı<br>(%) | 1.000 oyun için<br>kazanma olasılığı<br>(%) | 10.000 oyun için<br>kazanma olasılığı<br>(%) | 100.000 oyun için<br>kazanma olasılığı<br>(%) | 1.000.000 oyun için<br>kazanma olasılığı<br>(%) |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1                                           | 1,00                                      | 1,000                                       | 1,0300                                       | 0,96700                                       | 0,98930                                         |
| 2                                           | 1,00                                      | 2,100                                       | 1,9200                                       | 1,89100                                       | 1,92730                                         |
| 3                                           | 2,00                                      | 3,900                                       | 3,3900                                       | 3,50400                                       | 3,41800                                         |
| 4                                           | 6,00                                      | 6,100                                       | 5,9000                                       | 5,40600                                       | 5,50880                                         |
| 5                                           | 6,00                                      | 9,900                                       | 8,1500                                       | 7,85200                                       | 7,82110                                         |
| 6                                           | 8,00                                      | 9,800                                       | 9,9200                                       | 10,06400                                      | 9,99680                                         |
| 7                                           | 14,00                                     | 10,100                                      | 10,8500                                      | 11,44300                                      | 11,44340                                        |
| 8                                           | 12,00                                     | 11,000                                      | 11,7900                                      | 11,85700                                      | 11,83180                                        |
| 9                                           | 14,00                                     | 11,600                                      | 11,3700                                      | 11,09500                                      | 11,22230                                        |
| 10                                          | 7,00                                      | 9,800                                       | 9,9500                                       | 9,86600                                       | 9,86790                                         |
| 11                                          | 12,00                                     | 7,000                                       | 8,0100                                       | 7,95800                                       | 8,01780                                         |
| 12                                          | 6,00                                      | 6,400                                       | 5,7600                                       | 6,09400                                       | 6,03650                                         |
| 13                                          | 1,00                                      | 3,700                                       | 4,0700                                       | 4,43600                                       | 4,34060                                         |
| 14                                          | 5,00                                      | 3,000                                       | 3,0500                                       | 2,98300                                       | 2,93490                                         |
| 15                                          | 1,00                                      | 2,000                                       | 1,7200                                       | 1,90600                                       | 1,88080                                         |
| 16                                          | 2,00                                      | 0,400                                       | 1,2100                                       | 1,11400                                       | 1,18190                                         |
| 17                                          | 0,00                                      | 0,900                                       | 0,7800                                       | 0,67800                                       | 0,69640                                         |
| 18                                          | 0,00                                      | 0,300                                       | 0,4600                                       | 0,39500                                       | 0,39980                                         |
| 19                                          | 2,00                                      | 0,500                                       | 0,2800                                       | 0,22300                                       | 0,22600                                         |
| 20                                          | 0,00                                      | 0,100                                       | 0,1900                                       | 0,12100                                       | 0,11910                                         |
| 21                                          | 0,00                                      | 0,300                                       | 0,1200                                       | 0,08200                                       | 0,06900                                         |
| 22                                          | 0,00                                      | 0,100                                       | 0,0300                                       | 0,03300                                       | 0,03410                                         |
| TOTAL                                       | 100,00                                    | 100,00                                      | 99,95                                        | 99,97                                         | 99,96                                           |

Vaka çalışmamdaki tüm verileri içeren Tablo 1’den, genellikle gözlemlenen başarılı atış numaralarının bir aralığı olduğu ve bu aralık içinde belirli değerlerin (7, 8, 9) diğerlerinden daha fazla görüldüğü okunmaktadır. 10.000, 100.000 ve 1.000.000 oyun için optimum başarılı atış numarası 8 iken, bu değer 100 ve 1.000 oyun için 7 ve 9’dur.

Vaka çalışmamda belirsizliği azaltmak için oyun sayısını artırdım. Daha iyi bir karşılaştırma yapabilmek için, bu deneysel verilerin tüm sonuçlarını, aynı zamanda "Histogram" veya "Frekans Diyagramı" olarak da adlandırılan "Olasılık ve Başarılı Atış Numarası Değişimi Grafiği" (Grafik 1) üzerinde gösterdim.

100 ve 1.000 oyun için olasılık ve başarılı atış numarası grafikleri düzensiz veriler içermektedir ve düzgün bir eğri yoktur. Oysa 10.000, 100.000 ve 1.000.000 oyun için grafikler neredeyse aynı ve düzgün bir çan eğrisi şeklindedir. Oyun sayısı arttığında (ki bu da daha fazla

veri anlamına gelmektedir) her atış için bu oyunu kazanma olasılığını gösteren daha anlamlı bir grafik elde edilmiştir.



Bu oyunu kazanmanın deneysel olasılığı ve teorik olasılığı arasında farklılıklar olduğu görülmektedir. 1 atışta kazanmanın teorik olasılığı % 1,0 iken, deneysel olasılığı % 0,9893 (1.000.000 oyun ile) olarak bulunmuştur.

Bu oyunu en fazla, optimum değer olan 8 atışta kazanmanın deneysel olasılığı ise;

% 52.9365 (=0,9893 + 1,9273 + 3,4180 + 5,5088 + 7,8211 + 9,9968 + 11,4434 + 11,8318) olarak bulunmuştur.

Sonuç olarak; teorik ve deneysel olasılık oranları arasında farklılıklar olabilmektedir ve herhangi bir konuda ne kadar fazla veriye sahip olursak, olasılık kavramı o konu için hayatımızdaki belirsizliği o oranda azaltmamıza yardımcı olmaktadır.

**Kaynaklar:**

1. Ang, alfredo h-s., tang wilson h (1975). Probability concept in engineering planning and design, volume 1, basic principles. John wiley and sons. Printed book.
2. Walpole, ronald e., myers, raymond h., myers, sharon l (1998). Probability and statistics for engineers and scientists. Sixth edition. Prentice hall international, inc. Printed book.
3. Spiegel, murray r. (1980). Theory and problems of probability and statistics sı (metric) edition. Mcgraw hill, inc. Printed book.

## 2'NİN KUVVETLERİ İLE ŞİFRELEME

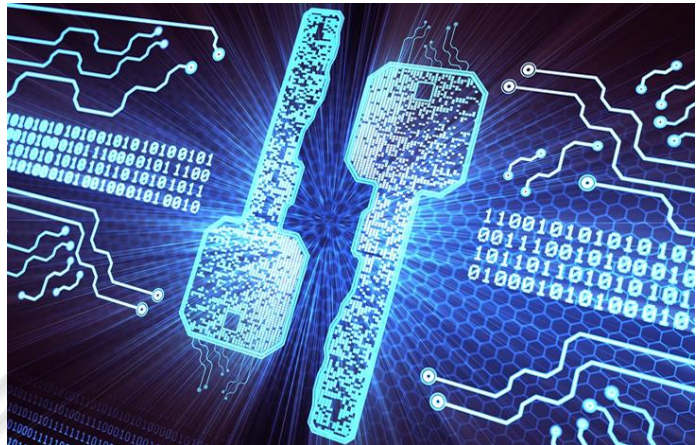
**SELİN SU ALTINTAŞ (10-D)**

İnsanlık, tarih boyunca sürekli kendisini geliştirmiştir. Öncelikle hayati ihtiyaçlarını gidermeyi, sonrasında ise birbirleri ile etkileşime geçmeyi öğrenmişlerdir. Böylelikle haberleşme doğmuştur. Haberleşmenin doğuşu ile hayatımıza şifreleme dediğimiz kavram girmiştir. İngilizceden dilimize geçmiş olan kriptografi şifreleme, bilgiyi kodlama işlemidir. Bilginin özel bir yöntem ile şifrlenip alıcının da aynı yöntemi kullanarak şifreyi çözmesi sürecidir. İdeal olarak, yalnızca yetkili taraflar bir şifreli metni düz metne geri çevirebilir ve orijinal bilgilere erişebilir.

Günümüzün temel sorunu bilgiyi güvenli şekilde iletmektir. Savunma sanayi, finans, kişisel ve iş hayatındaki bilgilerin paylaşımında güvenliğin sağlanması açısından, gönderilen bilginin karşı tarafa doğru olarak iletilmesi ve başkaları tarafından izlenmemesi gerekmektedir. Bu gereksinim nedeniyle iletişimde kriptoloji biliminde, anahtarlama yöntemleri kullanılmaya ve geliştirilmeye başlanmıştır. Sesar Şifrelemesi, Rotasyonel Şifreleme, Simetrik Şifreleme, Asimetrik Şifreleme bu yöntemlere örnek olarak verilebilir.

Bu çalışmada, bu anahtarlama yöntemlerinden biri olan Gizli-Anahtar (Simetrik) Yöntemi kullanılmış ve bunun için 2'nin ardışık pozitif tam sayı kuvvetlerinden oluşan bir sayı dizisini kullanarak sözel metinlerin, bir kod dizini şeklinde nasıl şifrelendiği anlatılmıştır. İletilen mesajın tek bir karşılığının olması için, kullanılabilen bilimsel şifreleme yöntemlerine örnek olarak, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin iki koşulu sağladığı belirtilmiştir. Bu koşullardan biri tek ve çift indisli tüm farklı sonlu alt kümelerindeki bütün sayıların toplamının da farklı olduğu, diğeri ise bu alt kümelerin süper artan olduğudur. Bu çalışmada, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri yerine bu koşulları sağlayan 2'nin pozitif tam sayı kuvvetlerinden oluşan sayı dizisi kullanılarak şifreleme yapılmıştır.

Bu çalışmada, tablo oluşturma, tablo yorumlama ve 2'nin pozitif tam sayı kuvvetlerini kullanarak kurgulanmış çözümleme yöntemi kullanılacaktır. Öncelikle şifrelenecek mesajdaki semboller alfabetik olarak dizilerek bir sıralama kodu oluşturulur (Tablo 1). Sonra, bu sembolere karşılık gelen 2'nin pozitif tam sayı kuvvetleri (Tablo 1) toplanarak bir gönderim kodu oluşturulur ve karşı tarafa şifreli mesaj (sıralama kodu; gönderim kodu) formatında iletilir. Alıcı bu mesajı Tablo 1'e göre bu gönderim koduna en yakın ve bu koddan küçük değere sahip ilk karaktere ait 2'nin pozitif tam sayı kuvvetini alır ve gönderim kodundan çıkarır. Elde edilen yeni sayı için ilk işlem tekrar uygulanır. En sonunda



elde edilen sayı 2'nin bir pozitif tam sayı kuvvetine denk geldiği anda çözümleme bitecektir ve alınan sıralama koduna göre semboller dizilerek mesaja ulaşılabacaktır.

| SEMBOL | $2^n$ | SAYISAL DEĞER | SEMBOL | $2^n$ | SAYISAL DEĞER  |
|--------|-------|---------------|--------|-------|----------------|
| A      | 21    | 2             | O      | 218   | 262.144        |
| B      | 22    | 4             | Ö      | 219   | 524.288        |
| C      | 23    | 8             | P      | 220   | 1.048.576      |
| Ç      | 24    | 16            | R      | 221   | 2.097.152      |
| D      | 25    | 32            | S      | 222   | 4.194.304      |
| E      | 26    | 64            | Ş      | 223   | 8.388.608      |
| F      | 27    | 128           | T      | 224   | 16.777.216     |
| G      | 28    | 256           | U      | 225   | 33.554.432     |
| Ğ      | 29    | 512           | Ü      | 226   | 67.108.864     |
| H      | 210   | 1.024         | V      | 227   | 134.217.728    |
| I      | 211   | 2.048         | Y      | 228   | 268.435.456    |
| İ      | 212   | 4.096         | Z      | 229   | 536.870.912    |
| J      | 213   | 8.192         |        | 230   | 1.073.741.824  |
| K      | 214   | 16.384        | .      | 231   | 2.147.483.648  |
| L      | 215   | 32.768        | ,      | 232   | 4.294.967.296  |
| M      | 216   | 65.536        | ?      | 233   | 8.589.934.592  |
| N      | 217   | 131.072       | -      | 234   | 17.179.869.184 |

Tablo 1. Sembollere karşılık gelen 2'nin pozitif tam sayı kuvvetleri

Aşağıda bir örnek üzerinde gönderen ve alıcının olduğu bir şifreli mesajı oluşturmayı ve alıcının Tablo 1'den yararlanarak şifreyi nasıl çözümlediği bir örnekle açıklanmaktadır.

FERİT kelimesi için (sıralama kodu; gönderim kodu) formatından oluşan bir şifreleme yapalım. 1 ve 2. aşamada sıralama ve gönderim kodlarını mesajı gönderen kişinin nasıl oluşturacağı belirtilmiştir. Daha sonra da, şifreli mesajı (kodu) alan kişinin şifreyi nasıl çözümleyeceği belirtilmiştir.

### 1. Aşama: Sıralama kodu oluşturma:

FERİT kelimesinin harflerini alfabetik sırayla belirtelim ve 1'den başlayarak numaralandıralım.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| E | F | İ | R | T |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Bu numaraları kullanarak FERİT kelimesinin sıralama kodunu oluşturalım.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| F | E | R | İ | T |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 5 |

## 2. Aşama: Gönderim kodu oluşturma:

Tablo 1’de her sembole karşılık gelen 2’nin pozitif tam sayı kuvvetlerinin toplamını bulalım.

| F   | E  | R         | İ     | T          | TOPLAM     |
|-----|----|-----------|-------|------------|------------|
| 128 | 64 | 2.097.152 | 4.096 | 16.777.216 | 18.878.656 |

FERİT kelimesini şifreli bir şekilde kuralımızı bilen alıcıya iletelim. FERİT kelimesini karşı tarafa (sıralama kodu; gönderim kodu) = (21435; 18.878.656) olarak iletelim. Bu kelime için sıralama kodu 21435, gönderim kodu; 18.878.656 olur.

### Şifreli mesajın Çözülmesi

Tablo 1’e göre bu gönderim koduna en yakın ve bu koddan küçük değere sahip ilk karakter alınır. Bu karakterin değeri gönderim kodundan çıkarılır ve elde edilen yeni sayıya ilk işlem tekrar uygulanır. En sonunda elde edilen sayı bir karakterin gerçek değerine (2’nin bir pozitif tam sayı kuvveti) denk geldiği anda çözümü bitecektir. Bu örnek için şöyle bir işlem sırası olacaktır;

- Tablo 1’e göre 18.878.656 sayısına en yakın sayı 16.777.216 ve karşılık gelen sembol “T” harfidir.

$$18.878.656 - 16.777.216 = 2.101.440 \text{ elde edilir.}$$

- Tablo 1’e göre 2.101.440 sayısına en yakın sayı 2.097.152 ve karşılık gelen sembol “R” harfidir.

$$2.101.440 - 2.097.152 = 4.288 \text{ elde edilir.}$$

- Tablo 1’e göre 4.288 sayısına en yakın sayı 4.096 ve karşılık gelen sembol “İ” harfidir.

$$4.288 - 4.096 = 192 \text{ elde edilir.}$$

- Tablo 1’e göre 192 sayısına en yakın sayı 128 ve karşılık gelen sembol “F” harfidir.

$$192 - 128 = 64 \text{ elde edilir.}$$

Tablo 1’e göre 64 = E harfi olduğu için çözümü biter. Elde edilen harfler E ,F,İ,R,T olur. Bize iletilen sıralama kodu 21435 idi. Elde ettiğimiz harfleri alfabetik sıraya göre numaralandıralım.

| E | F | İ | R | T |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Şimdide sıralama koduna göre sıralayalım.

| F | E | R | İ | T |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 3 | 5 |

Sonuç olarak bize iletilen kodu çözümleyerek “FERİT” mesajını elde ettik.

ANKARA kelimesini şifreleyelim. ANKARA kelimesinin harflerini alfabetik olarak sıralayalım.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | K | N | R |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| A | N | K | A | R | A |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 |

|   |         |        |           |           |
|---|---------|--------|-----------|-----------|
| A | N       | K      | R         | TOPLAM    |
| 2 | 131.072 | 16.384 | 2.097.152 | 2.244.610 |

*Tablo 2. Ankara kelimesinin çözümlenmesi*

Yukarıda verilen tablolara göre sıralama kodu: 132141 ve toplam değer: 2.244.610 olacaktır. Mesajı oluşturan kişi karşı tarafa (132141; 2.244.610) diye bir kod gönderecektir.

#### **Çözümleme:**

- Tablo 2' ye göre 2.244.610 sayısına en yakın sayı 2.097.152 ve karşılık gelen "R" harfidir.

$$2.244.610 - 2.097.152 = 147.458 \text{ elde edilir.}$$

- Tablo 2' ye göre 147.458 sayısına en yakın sayı 131.072 ve karşılık gelen "N" harfidir.

$$147.458 - 131.072 = 16.386 \text{ elde edilir.}$$

- Tablo 2'e göre 16.386 sayısına en yakın sayı 16384 ve karşılık gelen "K" harfidir.

$$16386 - 16384 = 2 \text{ elde edilir.}$$

- Tablo 1'e göre 2 = A harfi olduğu için çözümleme biter.

Elde edilen harfler A, K, N, R olur. Elde edilen harfleri alfabetik sıraya koyalım.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | K | N | R |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

Şimdide bize iletilen sıralama koduna göre harfleri sıralayalım.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| A | N | K | A | R | A |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 |

Çözümleme sonucunda bize gönderilen (132141; 2.244.610) şifreli mesajı ANKARA kelimesi olarak çözümledik.

2'nin ardışık pozitif tam sayı kuvvetlerini kullanarak yaptığımız şifrelemede göndericinin ve alıcının bildiği çözümleme yöntemi kullanılarak sözel metinleri güvenli bir şekilde iletmenin mümkün olduğu gösterilmiştir. Yapılan bu çalışma için üretilebilecek bir bilgisayar yazılımı ile de bu çalışma teknolojiyle entegre edilebilir.



Şimdi de sizin çözmeniz için bir şifre

367892148915; 23368896

Cevaba soldaki QR kodu ile ya da aşağıdaki linki kullanarak ulaşabilirsiniz.

<https://prezi.com/i/dpbsby0rf6gp/>

**Kaynaklar:**

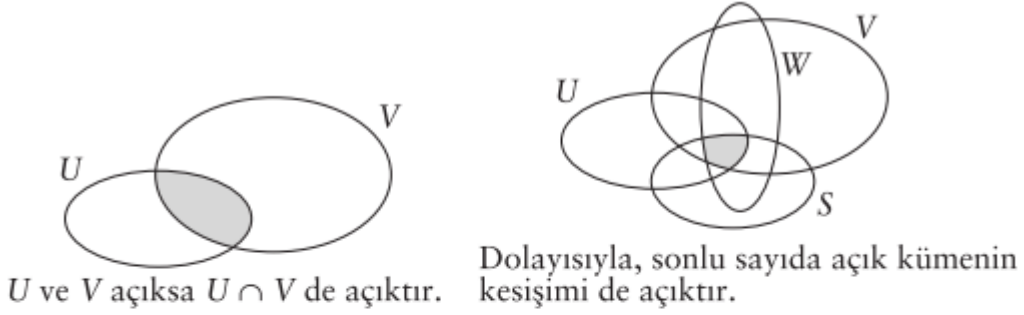
1. Kargın,A.(2019).Fibonacci ve Lucas Sayı Dizilerinin Bazı Özel Alt Dizileri ve Uygulamaları.(Yayımlanmış yüksek lisans tezi).Sakarya Üniversitesi /Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
2. Kodaz,H. ,Botsalı,M.F.(2010). Simetrik ve Asimetrik Şifreleme Algoritmalarının Karşılaştırması. Selçuk-Teknik Dergisi Cilt 9, Sayı:1-2010

**ZEYNEP ALTINBAŞ (10-D)**

Matematiğin dallarından biri olan topoloji, geometrik şekillerin topolojik eşleşmelerle değişmeyen, yani birebir, örten ve sürekli özellikleri üzerinde durur. Objeler lastik gibi esnetilip şekil verilebildiği ve elastik deformasyon ile birbirine dönüştürülebileceği için lastik levha geometrisi (rubber sheet geometry) olarak da bilinmektedir.

Analiz ve diferansiyel geometrideki sorulardan gelen topoloji; artık matematiğin cebir, kombinatorik, mantık dahil olmak üzere pek çok alanına yayılmıştır ve cebirsel/aritmetik geometride temel bir rol oynamaktadır. Topolojik uzayın günlük hayatta karşımıza çıkan çoğu örneği metrikler tarafından oluşturulur (bu tür topolojik uzaylar metriklenebilirdir), ancak tüm topolojilerin metriklerden doğmadığının da bilinmesi gerekir.

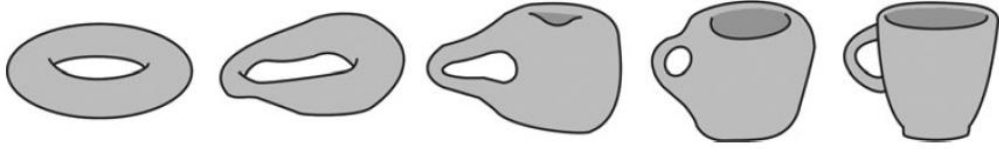
Açık küme reel sayılar kümesinde açık aralıkların birleşimi olarak yazılan alt kümeler olarak tanımlanabilir, topolojik uzay ise aşağıdaki görselde bulunan üç şartın da sağlanması ile oluşur.



Sonlu ya da sonsuz, kaç tane olursa olsun, açık kümelerin bileşimi hep açıktır.

$X$  ve  $Y$ 'nin topolojik uzaylar olduğu göz önüne alınarak,  $f : X \rightarrow Y$  belirli bir değer verilmemiş (arbitrary) bir fonksiyondur.  $Y$ 'deki her açık kümenin ters görüntüsü  $X$ 'te de açıksa,  $f$  fonksiyonunun sürekli olduğu söylenebilir. Yani her açık  $U \subseteq Y$  için,  $f^{-1}(U) \subseteq X$  de açıktır. Sonuç olarak topolojik uzayların fonksiyonu süreklidir.

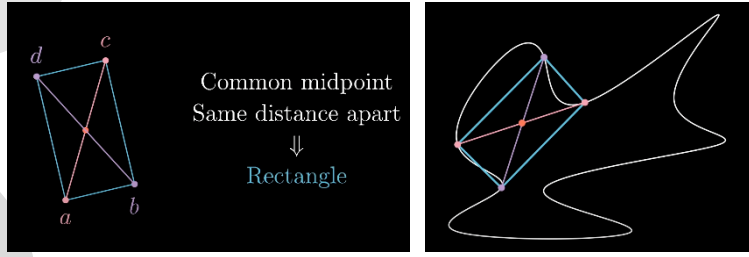
Topolojik uzaylar arasındaki bir  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun birebir, örten ve hem  $f$  hem de  $f^{-1}$ 'in sürekli olması durumunda bu fonksiyonun bir homeomorfizma olduğu söylenir. Homeomorfizma veya topolojik eşyapı, iki uzayın parça koparmadan sürekli olarak birbirine dönüşümünü inceler. Kelime Yunanca homoios "benzer" ve morphē "şekil-şeklini bozmak" kelimelerinden türemiştir.  $X$  ve  $Y$ 'den birbirine homeomorfizma varsa (bu bağıntı  $X \approx Y$  olarak gösterilir), bu iki topolojik uzay homeomorfik olarak adlandırılır. Eğer iki topolojik uzay homeomorfikse o zaman yalnızca ilgili nokta kümeleri değil, aynı zamanda açık küme koleksiyonları da birebir denklik içerisinde. Homeomorfizmalar bize topolojik uzayların ne zaman aynı kabul edilmesi gerektiğini gösterir. Homeomorfik olma durumunun refleksif, simetrik ve geçişli olduğundan; dolayısıyla da bir denklik ilişkisinin varlığından bahsedilebilir. Fakat birebir, örten ve sürekli bir fonksiyonun her daim bir homeomorfizma olmasının zorunlu olmadığına da dikkat edilmelidir.



### TORUS VE MÖBIUS ŞERİDİ

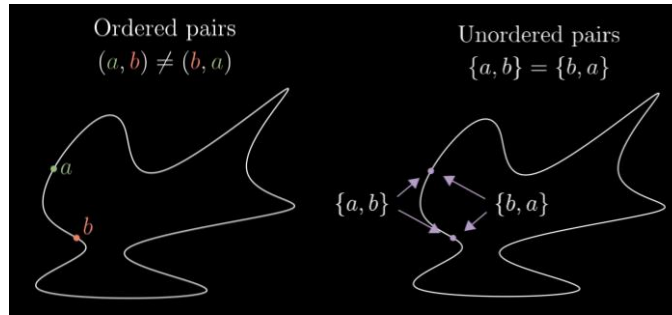
Kulplu bir kahve bardağının ve tatlı çöreğin (doughnut) topolojik olarak eşdeğer kabul edilmesi ilginç bir konudur. Bunun nedeni olarak, her ikisinin de birer deliğe sahip olması gösterilir. Peki bu birbirinden bağımsız iki şeyin topolojide eşdeğer kabul edilmesinin nedeni nedir? Bu sorunun cevabı "torus" şekli ile verilebilir ancak bu şeklin öncesinde İngilizcede "Inscribed Rectangle (Rectangular Peg) Problem" denilen problemin temeline göz atmalıyız.

Rastgele çizgilerden oluşturulmuş herhangi bir kapalı şekil üzerinde her zaman bir kare bulunması mümkün müdür? Veya yine aynı şekilde dikdörtgen çizilebilir mi? Bir dikdörtgenin oluşması için dört köşe gerektiği kesin; birbirine karşıt konumda olan köşeleri birer eş olarak alacak olursak da her iki eşin arasının aynı mesafede olması gerekiyor ve aynı orta noktayı paylaşıyorlar. Buna göre bizim bu şeklin içinden asıl bulmamız gereken, aynı orta noktaya sahip ve birbirine mesafesi eşit olan iki eş, yani dört noktadır.



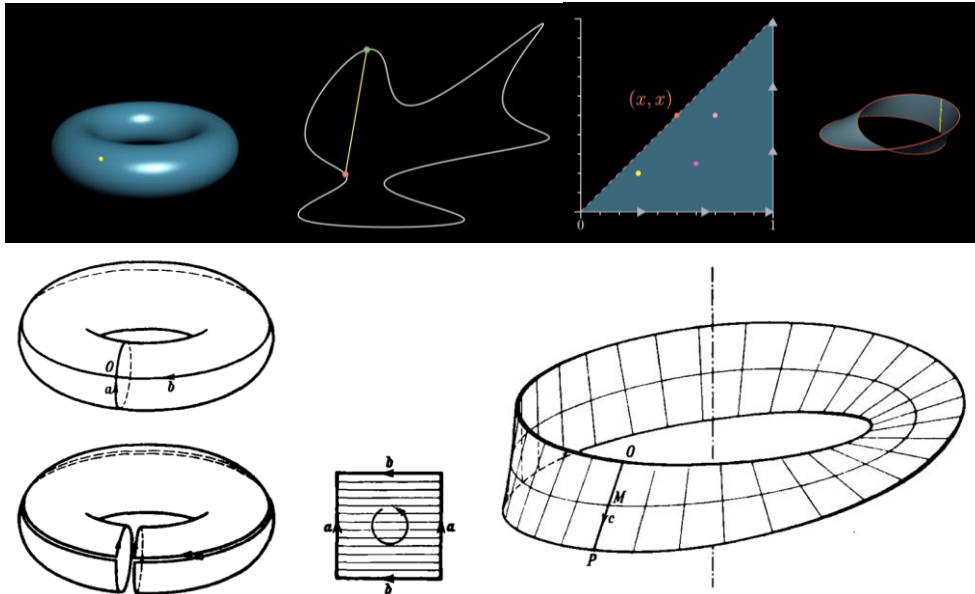
Şekil 1: Inscribed Rectangle Problem

Bu teoremin kanıtını iki kısımda değerlendirmemiz gerekmektedir: sıralı ve sırasız ikililer. Sıralı ikililerde bahsedilen eşler  $(a, b)$  olarak alınıyorsa, sırasız ikililerde hem  $(a, b)$  hem de  $(b, a)$  olarak alınabilir. Buna göre “torus” sıralı nokta çiftleri için doğal bir şekil iken, “Möbius şeridi” tüm sırasız nokta çiftlerini temsil eden yüzeydir.



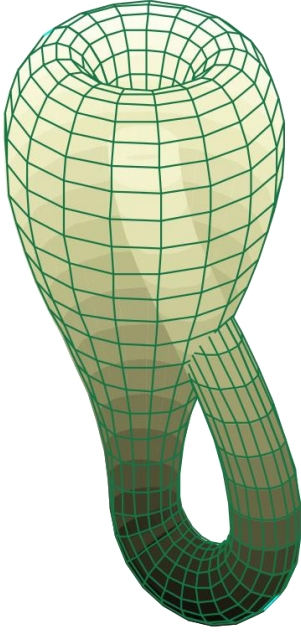
Şekil 2: Ordered and Unordered Pairs

Torus şeklinin üzerindeki her nokta, bahsedilmiş olan kapalı şekilde bir nokta çiftine karşılık gelir. Aynı şekilde kapalı şekil üzerindeki her nokta çifti, torus üzerindeki bir nokta ile bağlantılıdır. Birim kareden torus şekli yapılabilir.



Şekil 3. Torus ve Möbius şeridi

Möbius şeridinin özellikleri bağımsız olarak ve neredeyse aynı zamanda August Ferdinand Möbius ve Hohann Benedict Listing tarafından 1800'lerin ortalarından keşfedilmiştir. Bu şekil, dikdörtgen bir şeridi  $180^\circ$  derece döndürüp bükükten sonra uçları birbirine iliştirerek elde edilebilir. Ortaya çıkan şeklin yüzeyinden bir çizgi çizmeye başlanırsa bu şeridin aslında tek yüzeyli olduğu görülür.



Şekil 4: Klein Şişesi

### KLEIN ŞİŞESİ

Klein şişesini 1882 yılında keşfeden Felix Klein, bu şekli “bir lastik borunun bir parçasının ters çevrilerek kendi içinden geçmesine izin verilmesiyle, dış ve için buluşması şeklinde görselleştirilebilen” bir yüzey olarak tanımlamıştır. Bir şişe gibi görünmesinin yanı sıra herhangi bir hacmi kapsamayan bu cisim aslında sıvı tutamaz.

Klein şişesinin kapalı bir yüzey olduğu açıktır, uzayın sonlu bir bölgesine sığdırabilmeniz anlamında sonludur. Aynı zamanda tek taraflıdır.

Möbius şeridi ve Klein şişesini beraber değerlendirecek olursak, Klein şişesinin aksine Möbius şeridinin kenarlarının yapıştırılmış olmasıyla bir sınırı vardır. Ancak ikisinin arasındaki asıl bağlantı, iki Möbius şeridinden bir Klein şişesi elde edilebilmesidir. İki Möbius şeridini alıp ve sıradan bir iki taraflı şeritle sınırlarını birleştirerek kapalı bir şekil oluşturursanız, oluşan bu şekil Klein şişesi olur.

### BORSUK-ULAM TEOREMİ

Aynı anda dünya üzerinde öyle iki nokta olduğunu düşünün ki hem sıcaklık hem de hava basınçları aynı olsun. Şöyle bir gerçek var ki, hava durumu veya zaman fark etmeksizin birbirine zıt iki noktada bu bahsedilen özellikler aynıdır. Bu durum ise “Borsuk-Ulam teoremi” ile açıklanabilir.

Borsuk-Ulam teoremine göre iki antipodal (birbirine zıt, tam tersi) nokta her zaman kesişir. Örneğin; bir küre düzlem üzerinde iki boyutlu olacak şekilde ve yırtılmadan gösterildiğinde, birbirine zıt iki noktanın üst üste gelmesi kesin bir durumdur.

Bu teoremi bir probleme uyarlayacak olursak ise; iki hırsızın bir kolye çaldığı ve bu kolye üzerindeki taşları, (örneğin mavi, yeşil, sarı... gibi düşünülebilir) kolye üzerinde en az miktarda kesim yaparak eşit bir şekilde bölmek istediği bir durumu ele alalım. Kolyede  $n$  tane farklı çeşit boncuk varsa ve iki hırsız arasında adil bir şekilde

bölünebilmeleri için çift sayıdalarsa, bu problemi çözmek için kaç kesim yapılması gerektiği bilinebilir mi?

Borsuk-Ulam teoreminin, küre üzerinde bazı antipodal nokta çiftlerinin her daim birbirinin üzerine geldiğini garantilemesi bu probleme bir çözüm oluşturur. Buna göre,  $n$  tane kesim kullanılarak yapılan ve hırsızlar arasında eşit paylaşım sağlayacak bir kesim olması durumu kesindir. Örneğin, 5 tür boncuk varsa 5 kesim yapılması yeterli olacaktır.

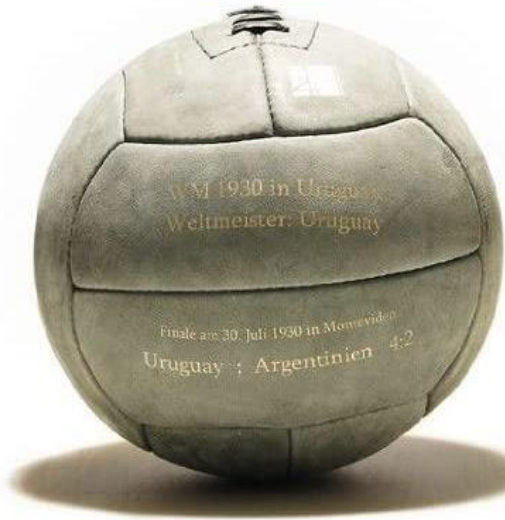
**Kaynaklar:**

1. *A Textbook of Topology*. Ed. H. Seifert, W. Threlfall, Joan S. Birman, Julian Eisner. 1980. [<https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/seifthreng.pdf> son erişim tarihi: 15 Nisan 2022]
2. *Who cares about topology? (Inscribed rectangle problem)*. Ed. 3Blue1Brown. 5 Kasım 2016. [<https://www.youtube.com/watch?v=AmqkSdhK4K8> son erişim tarihi: 15 Nisan 2022]
3. *Sneaky Topology | The Borsuk-Ulam theorem and stolen necklaces*. Ed. 3Blue1Brown. 18 Kasım 2018. [<https://www.youtube.com/watch?v=yuVqxCSsE7c&t=672s> son erişim tarihi: 15 Nisan 2022]
4. *The Necklace-Splitting Problem*. Ed. Karolina Simcic. [<https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Simcic.pdf> son erişim tarihi: 15 Nisan 2022]
5. <https://www.britannica.com/science/Mobius-strip>
6. [https://en.wikipedia.org/wiki/Klein\\_bottle](https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle)
7. Nesin, A. (2019). Analiz IV. Nesin Yayıncılık Ltd. Şti. [https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2019/05/alinesin-analiz\\_4.pdf](https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2019/05/alinesin-analiz_4.pdf)
8. *Introduction to Topology*. Ed. Alex Küronya. 24 Ocak 2010. [[https://www.uni-frankfurt.de/64271720/TopNotes\\_Spring10.pdf](https://www.uni-frankfurt.de/64271720/TopNotes_Spring10.pdf) son erişim tarihi: 15 Nisan 2022]
9. *Introducing the Klein bottle*. Ed Marianne Freiberger. 6 Ocak 2015. [<https://plus.maths.org/content/introducing-klein-bottle> son erişim tarihi: 15 Nisan 2022]



**SİNAN TUĞUTLU (10-P)**

Kendimi bildim bileli en sevdiğim oyunlar top oyunları oldu. Tek başıma veya arkadaşlarımla çeşit çeşit top oyunları oynadım. 'Futbol topu neden yuvarlak değildir?' sorusu ile karşılaşınca dek bu topun köşe ve kenarları, düz yüzeyleri dikkatimi çekmemiştir. Neredeyse yuvarlaktı zaten. Bunun hakkında araştırma yaptıkça topun 3 katmandan (odacık, astar ve kılıf) oluştuğunu, tarihi boyunca çeşitli malzemelerden ve hatta farklı şekil birleşimlerinden de yapıldığını öğrendim. Günümüzün futbolu 19. yüzyılın ikinci yarısı oluşmaya başlamış. 1838'den beri lastik toplar yapılmış ve bunun için önceleri büyük hayvanların organları kullanılıyormuş. 1872 yılında Futbol Federasyonu kauçuktan yapılan top için boyut ve ağırlık standardı getirmiş. Futbol topu çevresi 70 santimetre ve ağırlığı 400 gram olarak belirlenmiş.



Dikdörtgenlerin birbirine dikilmesi ile yapılan futbol topu, şirketlerden birinin birbirine bağlı beşgen ve altıgenden oluşan bir lastikle çıkardığı bir futbol topunun 1950 yılına kadar oluşturulmasına kadar kullanılmış. Lastikle oluşturulan bu futbol topu, küreye daha yakın, daha yuvarlak bir şekil elde etmeyi mümkün kılmış ve topun uçuşunu daha doğal hale getirmiş.

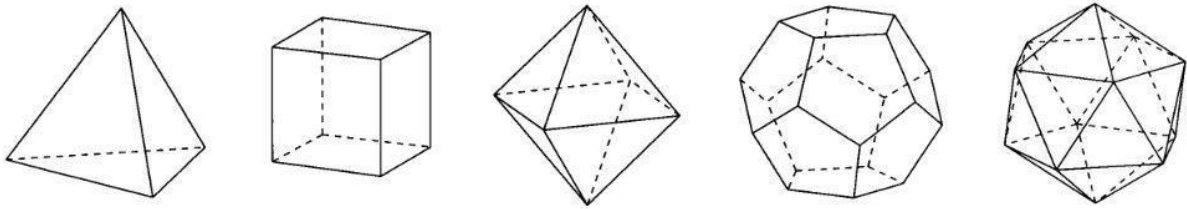
Başlangıçta deriden yapılan ve yağmurda oynandığında suyu emerek ağırlaştığından üreticiler, poliüretan ve polivinil klorür malzemesini kullanmaya başlamış ki, bu malzeme suyu emmez ve serttir. 2004 yılında bir başka şirket termal birleştirme ile istenilen herhangi bir şekildeki parça ile yuvarlağa en yakın topu yapabilme teknolojisini geliştirmiş. Buna rağmen hala beşgen ve altıgenlerden oluşan futbol topları popülerliğini korumakta.

Aslında kendi gözlemlerimden yola çıkarsam, oyun oynarken top patladığında karşılaştığım tam şişirilmemiş bir futbol topunda beşgen ve altıgenler oldukça belirgin iken, tam şişirilen bir futbol topu küreye çok yakın bir şekil alıyor.



Tam olarak standart bir futbol topu, her beşgenin altıgenlerle çevrenmesi ile oluşuyormuş. Yani 12 beşgen ve 20 altıgen olmak üzere 32 çokgen parçasının birbirine dikilmesi ile yapılmış. Ama neden beşgen ve altıgen kullanılmış da başka geometrik şekiller değil? Mükemmel bir uyum içinde bir araya gelen bu çokgenler için 2380 yıl önce, M.Ö. 360 yılında Platon 'Timaus' adlı kitabında düzgün, çok yüzlü çokgenlerden bahsederek bir açıklama getirmiş.

Düzgün, çok yüzlü (platonik) cisimler her köşesinde aynı sayıda birbirine eş düzgün çokgenin kesiştiği üç boyutlu cisimlerdir. Çokgensel düzlem parçaları ile sınırlandırılmış cisimlere çok yüzlü denilmektedir. Bu düzlem parçalarına yüz, yüzlerin ara kesitlerine ayrıt (kenar), üç veya daha çok ayrıtın birleştiği noktaya ise köşe deniliyor. Çok yüzlüler içinde özellikle düzgün olan oldukça ilgi çekicidir. Bugüne kadar araştırılmasına rağmen sadece beş tane düzgün çok yüzlü bulunabilmiş.

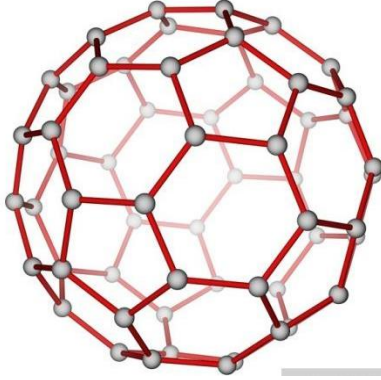


Düzgün çok yüzlüler; Dört yüzlü (tetrahedron), düzgün dört yüzlü veya küp, Sekiz yüzlü (oktahedron), oniki yüzlü (dodekahedron) ve Yirmi yüzlü (ikosehedron) olarak sadece 5 tanedir. Bu tür çok yüzlülerin en küçüğü, 4 tepe noktası, 6 kenar ve 4 eşkenar üçgenden (4 üçgensel yüzden) oluşan düzgün dörtyüzlü piramit ve en büyüğü 20 üçgensel yüzden oluşan ikosahedrondur. Bu cisimlerin neden beş tane olduğunun ispatında çok ilginç bir formül kullanılmıştır, “Euler’in çok yüzlüler formülü” Ünlü İsviçreli matematikçi Leonhard Euler’in (1707-1783) adıyla anılan formül  $S$  tepe sayısı,  $A$  kenar sayısı,  $F$  yüz sayısı olmak üzere  $S - A + F = 2$  biçimindedir. Bu formül, futbol topu gibi kenarları boyunca birleşen yüzlerden oluşan bütün konveks (dış bükey) katı cisimler için geçerlidir. Bir futbol topunun şeklini ve matematik ile olan ilişkisi Euler’in çok yüzlüler formülü ile anlaşılabilir. Aynı zamanda Fulleren denilen futbol topu görüntüsüne benzeyen bir molekül yapısından faydalanarak ilerleyeceğiz.

## FUTBOL TOPUNUN ÇOKGENLERİ VE EULER’İN ÇOK YÜZLÜLER FORMÜLÜ

Bir çok yüzlü olan futbol topunu anlayabilmek için futbol topunun çokgenlerine ait değerleri Euler’in çok yüzlüler formülü yerleştirelim, buna göre  $x$  sayıda altıgen ve  $y$  sayıda beşgenden oluştuğunu düşünelim; toplam yüz sayısı  $x + y$  kadar olacaktır. Toplamda, beşgenlerin  $5y$ , altıgenlerin de toplam  $6x$  kenarı olacaktır. O zaman toplam kenar sayısı  $5y + 6x$  olmalıdır. Her kenar, topu oluşturan iki yüz tarafından paylaşılır. Bu nedenle de bu sayının yarısı bizim şeklimizin toplam yüzünü verecektir. Yani  $\frac{5y+6x}{2}$ . Aynı şekilde toplam köşe

sayısını da hesaplanabilir. Ancak bir köşe üç şekil tarafından paylaşıldığı için toplam yüz sayısını bu sefer 3'e bölmemiz gerekir. Bu durumda toplam köşe sayımız da  $\frac{5y+6x}{3}$  kadardır.



Fullerenler büyük karbon molekülleridir. Şekilleri, beşgen ve altıgenlerden oluşur. Her fullerene tam olarak 12 beşgen içerir, ancak altıgen sayısında bir sınır yoktur.

Şimdi bunları Euler formülünde yerlerine yazalım. Bu durumda çözümde  $y$ 'ler birbirini götürecektir ve  $x$  sayısı 12 olarak bulunacaktır. Artık futbol topumuz için 12 beşgen kullanılması gerektiğinden eminiz. Şimdi altıgen sayısını bulmamız gerekiyor. Bununla birlikte altıgen sayısında aslında bir sınırlama yoktur. Aynı şekilde tepe noktası sayısında da bir sınır yoktur. Ancak standart bir futbol topu için seçim yapılırken, minimum değerler düşünülmüş ve tepe noktası sayısı 60 olarak kabul edilmiştir. Tepe noktalarında üç altıgen yan yana getirilemediğine göre, her tepe noktasında en az bir beşgen bulunmak zorundadır.

Toplam 12 beşgen olduğundan, topta en çok 60 tepe noktası var demektir. Bu durumda  $S = \frac{5y+6x}{3}$  formülünde  $S$  yerine 60 ve  $x$  yerine 12 yazarsak altıgen sayısını veren  $y$  sayısı da 20 olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} S &= \frac{5y + 6x}{3} \\ \frac{5 \cdot 12 + 6x}{3} &= 60 \\ 60 + 6y &= 60 \cdot 3 \\ 6y &= 180 - 60 \\ 6y &= 120 \\ y &= 20 \end{aligned}$$



#### Kaynaklar:

1. <https://www.matematiksel.org/futbol-topunun-matematiksel-sirlari-top-yuvarlak-degidir/>
2. <https://www.matematiksel.org/eulerin-cokyuzluler-formulu/>
3. <https://www.acikbilim.com/2014/09/dosyalar/mesin-yuvarlagin-anatomisi.html>
4. <https://tr.nationalgreenhighway.org/1552-why-does-a-familiar-soccer-ball-have-two-types-of-ch.html>



İki farklı pozitif tamsayının toplamı 68 ve farkı 18'dir. Bu iki sayının çarpımı kaçtır?

**SORU İŞARETİ**

|            |   |   |
|------------|---|---|
| AYÇİÇEĞİ   | 2 | 4 |
| HARİKULADE | 1 | 2 |
| DEKORATİF  | 0 | 0 |
| MARMARA    | 3 | 7 |
| ŞEFFAF     | 1 | 3 |
| HATTAT     | ? | ? |

Soru işaretlerinin yerine hangi sayılar gelmelidir?

## HARF SEÇ

Her bloktaki dört harften birini öyle seçiniz ki, seçilen harfler soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru okunduğunda anlamlı sözcükler oluşsun.

Örnek:

The diagram illustrates the transformation of a 6x6 grid into a 5x5 grid. The 6x6 grid on the left contains the following letters:

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | J | O | V | P | O | O |
| K | L | Y | Z | P | R |   |
| L | M |   |   | I | J |   |
| N | O |   |   | K | L |   |
| T | U | A | C | P | R |   |
| U | V | C | S |   |   |   |

An arrow points to the 5x5 grid on the right, which contains the following letters:

|   |  |   |  |   |  |
|---|--|---|--|---|--|
| K |  | O |  |   |  |
|   |  |   |  | P |  |
|   |  | O |  |   |  |
| T |  | A |  |   |  |
|   |  |   |  | S |  |

## KOŞULLU SAYI

1 ile 9 arasındaki 9 

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | N | E | F | S | Ş | B | C | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

 rakam kullanılarak rakamları farklı 5 basamaklı sayılar oluşturulacaktır. Oluşturulan sayıda yan yana gelen her iki rakam bir asal sayı oluşturmalıdır. Buna göre bu koşulu sağlayan kaç farklı sayı olduğunu bulunuz.

## BÖLME İŞLEMLERİ

**1/2/3/4/5/6/7/8/9 = 70**

Yukarıda verilen sayılar ve bölme işaretlerinden oluşan eşitliğe sadece parantezler ekleyerek eşitliği doğru hâle getireceksiniz. Not: Sınırsız parantez hakkınız var.

## DİJİTAL SAAT

00.00.00 ile 23.59.59 arası bir saat var. Saate baktığınızda saatteki rakamların kendi değerleri kadar olduğunu görüyorsunuz. (Örneğin 8 varsa 8 adet 8 yazmalıdır.) Bu koşulu sağlayan kaç tane saat kombinasyonu vardır?

Eğer aynı rakamlar arka arkaya  
olmalıdır denseseydi cevap 6 olurdu.

# PIRAMIT

Verilen piramitteki boş kutulara 1 ile 9 arasındaki rakamları öyle yerleştirin ki, hiçbir satırda rakam tekrarı olmasın ve ardışık rakamlar yan yana gelmesin. İki alt kutunun toplamı veya farkı üstteki kutuya eşittir.

Örnek:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 6 |   |   |   |
| 2 | 4 |   |   |
| 3 | 5 | 9 |   |
| 3 |   |   |   |
|   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |
| 8 |   | 2 |   |
| 7 |   |   | 8 |

## DÖNÜŞTÜR

Her adımda, bir önceki satırda bulunan sözcüğün bir harfini atıp yerine farklı bir harf getirerek anlamlı sözcükler elde edin ve son satırdaki sözcüğe ulaşın.

Örnek: DOST  $\rightarrow$  TOST  $\rightarrow$  TEST  $\rightarrow$  MEST  
 $\rightarrow$  MERT  $\rightarrow$  MERA

## ALTIN DOLU KÜP

3 arkadaşı bir küp altın bulup aralarında eşit olarak paylaşmaya karar verdiler. Ancak gece vakti olduğundan bu işi sabaha bırakmayı uygun bulup yattılar. Gece biri uyandı ve hakkını almaya karar verdi. Küpteki altınları döküp 3 eşit gruba ayırdı, iki tane fazla geldi. Payını ve fazlalığı alıp kalanı tekrar küpe doldurarak yattı. Sonra sırasıyla ikinci ve üçüncü de uyandı ve birbirlerinden habersiz şekilde aynı işlemi tekrarladı, onlar da ikişer tane arttı ve artanla birlikte kendi paylarını da alıp tekrar yattılar. Sabah hepsi uy-anınca gece yaptıklarından hiç söz etmeyip altınları yere döktüler ve 3 eşit gruba ayırdılar. Şanslarına bu defa hiç artmadı. Herkes bu grubu alıp kesesindekilere ekledi ve ayrıldılar. Buna göre başlangıçta küpte **en az** kaç altın vardı?

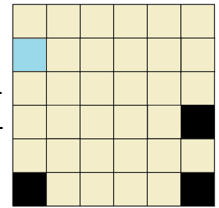
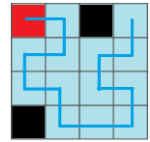
## SU YOLU

Mavi karede başlayan ancak nerede bittiği belirtilmeyen, her boş kareden geçen ve kendisini kesmeyen bir su yolu oluşturun.

## TAMAMLA

Soru işaretlerinin yerine her satırdaki  
birinci sözcüğü tamamlayan, ikinci söz-  
cüğü başlatan harfleri bulunuz. Bu harf-  
ler yukarıdan aşağıya doğru birleştiril-  
diğinde hangi sözcük oluşacak?

Örnek :



### Örnek: TIRTIL

**SORU**

|    |     |     |    |   |     |
|----|-----|-----|----|---|-----|
| SA | TIR | NAK | RU | ? | IZ  |
| DU | T   | İP  | KR | ? | TÖR |
| AK | IL  | İK  | GA | ? | L   |

**FİYAT**

Fiyatı AB olan bir ürüne satıcı ilginç bir yöntem kullanarak ürünün fiyatını önce arttırıyor ve daha sonra ise indiriyor. Bunu yaparken şunları yapıyor: Önce fiyatın rakamlarını birbirinden çıkartıyor (sonuç pozitif olacak şekilde) ve fiyatın üzerine ekliyor. Sonra oluşan bu fiyatın üzerine ürünün ilk fiyatındaki rakamların çarpımı kadar fiyat düşüyor. Örneğin, 74 liralık bir ürün için, satıcı ilk önce  $7-4=3$  lira fiyatını arttırıyor.  $74+3=77$  Sonra 77 liralık ürünün fiyatından ilk fiyatın (74) rakamları çarpımı ( $7 \times 4 = 28$ ) 28 lira düşüyor ve  $77-28=49$  liraya satıyor. Son fiyat, ilk fiyatın yarısı kadar olduğuna göre ürünün fiyatını bulunuz.



## CEVAP ANAHTARI

### 29 HARF

SOMURTKAN

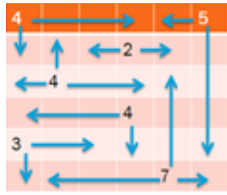
APARTMANLAR

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 5 | 4 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 3 | 5 | 1 |   |
| 1 | 5 | 2 | 3 | 4 |   |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 5 |   |
| 5 | 2 | 4 | 1 | 3 | 3 |

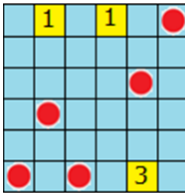
### SİLİNER HARFLER

E, T (BAKTERİ, KESTANE)

### OK PARÇALARI



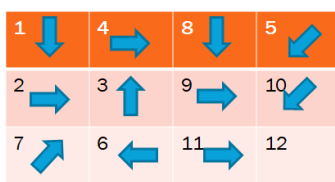
### FENERLER



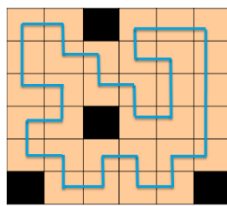
### KÜP BLOKLAR



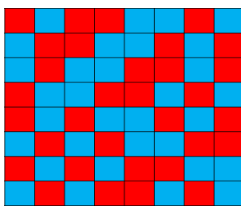
### LABİRENT



### YOL



### RENKLİ KARELER



### MASALAR

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |   | 4 |
|   |   |   |   |   |   | 6 |
|   |   |   |   |   |   | 4 |
|   |   |   |   |   |   | 6 |
|   |   |   |   |   |   | 2 |
|   |   |   |   |   |   | 0 |
|   |   |   |   |   |   | 5 |
|   |   |   |   |   |   | 5 |
| 4 | 6 | 2 | 6 | 4 | 2 | 5 |

### DOĞRU – YALAN

A, B ve D; doğrucudur ve C yalancıdır.

### EŞİTSİZLİK

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | > | 4 | > | 3 | > | 1 | 2 |
|   |   | v |   |   |   |   |   |
| 4 |   | 3 | > | 2 |   | 5 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |   | ^ |
| 1 |   | 5 | > | 4 |   | 2 | 3 |
|   |   |   |   |   | v |   |   |
| 3 |   | 2 |   | 1 |   | 4 | 5 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 | > | 1 |   | 5 |   | 3 | 4 |

### SAYILAR

1092

## SORU İŞARETİ

Sırasıyla 2 ve 5 gelmelidir. (1. Sütundaki sözcükte tekrar eden harflerin sayısı 2. Sütuna, toplam tekrar edilen harf sayısı ise 3. Sütuna yazılıyor.)

### HARF SEÇ

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| S |   |   |   |   | N | S |
|   | E | A |   |   |   |   |
|   |   | K |   |   |   |   |
| A |   |   |   |   |   | E |
| Y |   |   |   | I |   |   |
|   | E | T |   |   | M |   |
|   |   | O |   |   |   |   |
| I |   |   |   |   | A |   |
|   |   |   | R |   |   | I |
| M | E |   |   | C |   |   |

### KOŞULLU SAYI

Toplam 24 sayı oluşturulabilir.

### BÖLME İŞLEMLERİ

$(1/(2/(3/(4/5/6/7/8)/9))= 70$

### DİJİTAL SAAT

32 tane saat kombinasyonu vardır.

### PİRAMİT

|             |
|-------------|
| 3           |
| 4 7         |
| 6 2 9       |
| 2 4 6 3     |
| 6 8 4 2 5   |
| 7 1 9 5 3 8 |

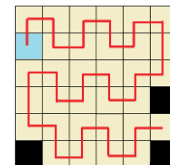
### DÖNÜŞTÜR

BURÇ → BORÇ → BORA → BOYA → SOYA → SODA

### ALTIN DOLU KÜP

50 altın vardır. (Sağlama: Önce ilk kişi altınları üçer eş gruba ayırdı. (16-16-16-2) Kendi payını (16) altını ve fazlalık olan 2 altını yani toplamda 18 altını aldı. Sonra diğer kişi uyandı. Kalan 32 altını üçer eş gruba ayırdı. (10-10-10-2) Kendi payını (10) ve fazlalık olan 2 altını yani toplamda 12 altını aldı. Üçüncü ve son kişi ise kalan 20 altını üçer eş gruba ayırdı. (6-6-6-2) Kendi payını (6) ve fazlalık olan 2 altını yani toplamda 8 altın aldı. Sabah uyandıklarında kalan 12 altını üçer eş gruba ayırdılar. Herkes 4 altın alıp ayırdı.)

### SU YOLU



### TAMAMLA

HEDİYE

### FİYAT

38 lira

Düzeltilme: Geçen yıl yayınlanan 'Alfabetik' sorusu eksik yayımlanmıştır: Sorunun yönergesine "M" harfi çifttir ve "I" harfinin ipucu olarak 5 olduğu eklenmelidir. Soruda yapılan bu eklemeler sonunda soru tek cevaplı olur ve yayımlanan cevap sorunun tek doğru cevabı olmuş olur. Anlayışınız için teşekkürler.

Bu sene de Aeternum dergimizi yeniden çıkarmanın mutluluğunu ve heyecanını yaşıadık ve 10. sayımıza ulaştık. Bu aşamada her zaman desteğiyle yanımızda olan TED Ankara Koleji Vakfı Özel Lisesi Müdürü Sayın Tamer ATACAN'a ve Müdür Başyardımcısı Sayın iek ÜNAL'a, fikirleri ve desteği ile her zaman yanımızda olan Matematik Zümre Başkanı Sayın Özge KESKİN'e, özğün düşünceleri ve katkılarıyla dergimizi zenginleştiren matematik zümresindeki tüm değerli öğretmenlerimize, yazıları ile dergimize katkıda bulunan tüm öğrencilerimize, yazıların düzenlenmesinde bize yardımcı olan Türk Dili ve Edebiyatı öğretmenimiz Sayın Şule KAYNAR'a, dergi kapağında kullandığımız eserlerin sahibi sevgili öğrencilerimize ve resimleriyle katkıda bulunan görsel sanatlar zümresine TEŞEKKÜR EDERİZ.

Aeternum Yayın Ekibi



**TAŞPINAR MAHALLESİ 2800. CADDE NO: 5**  
**06830 İNCEK/GÖLBAŞI/ANKARA**  
**SANTRAL: 0 (312) 586 9000**  
**FAKS: 0 (312) 586 9037**